Sesiones uno a ocho

Transparencias
y
hojas

Inglés y Español

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

CONTENIDO

Sesión uno

Tangramas: Rompecabezas con formas geométricas----------BLM 1

Formas del pájaro----------BLM 2

Actividades adicionales con tangramas----------BLM 3

Exploraciones geométricas con tangrams: Actividades 1-3----------BLMs 4.1-3

Geometría en práctica: cuadros y triángulos----------BLM 5

Geometría en práctica:Actividades 1-6----------BLMs 6.1-6

Descubrir y comprobar propiedades de los cuadrados experimentalmente: Actividades 1-7----------BLMs 7.1-3

Un barco de dos chimeneas----------BLMs 8.1-2

Los niveles de Van Hiele : Transparencia----------BLMs 9.1-2

Niveles de Van Hiele de desarrollo del pensamiento geométrico----------BLMs 10.1-2

Soluciones: Rompecabezas de tangramas----------BLMs 11.1-2

Sesión dos

Ángulos con popotes y pasadores----------BLMs 12.1-2

Los ángulos de los bloques de patrones----------BLMs 13.1-4

Miediendo ángulos con cuñas de 30º ----------BLMs 14.1-2

Un transportador con subdivisiones de 15º ----------BLMs 15.1-3

Ángulos de referencia----------BLMs 16.1-2

Medición de los ángulos con un transportador----------BLMs 17.1-5

Suma de los ánulos de un triángulo----------BLMs 18.1-6

Actividad adicional par suma de los ánulos de un triángulo----------BLM 19

La suma de los ángulos en un cuadrilátero----------BLM 20

Sesión tres

Área y perímetro----------BLM 21

Papel gráfi co de un centímetro----------BLM 22

Área en el geoplano----------BLMs 23.1-5

Sugerencias y soluciones----------BLMs 24.1-2

Un rompecabezas para el área de un paraleloramo----------BLM 25

El área de un trapecio----------BLM 26

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

CONTENIDO

Sesión cuatro

Formas de papel picado----------BLMs 27.1-2
Volumen----------BLMs 28.1-2
El volúmen de un pirámide y cono----------BLM 29
Cubo----------BLM 30
Representaciones geométricas de operaciones aritméticas----------BLMs 32.1-3
Geometría con papel doblado----------BLMs 33.1-4

Sesión cinco

Actividades al aire libre para la circunferencia----------BLM 34
La relación entre la circunferencea y el diámetro----------BLM 35
Tabla de Diámetro, Circunferencia, and Razón----------BLM 36
Área de un círculo----------BLM 37
Círculo en cuadrícula----------BLM 38
Círculo y cuadrado del radio----------BLM 39
Círculo con el radio----------BLM 40
Cuarto cuadrado del radio----------BLM 41
Área de polígonos regulares----------BLMs 42.1-2
Relación entre las fórmulas para el área y la circunferencia----------BLMs 43.1-2
Un cono hecho de un círculo----------BLM 44
Cilindros con la misma superficie lateral----------BLM 45
“Calcular la circunferencia” y “El problema inverso”----------BLM 46
Un experimento mental----------BLMs 47.1-2

Sesión seis

Rompecabezas de Pitágoras: Grupo A----------BLM 48
Rompecabezas de Pitágoras A----------BLM 49
Rompecabezas de Pitágoras A y Actividades----------BLM 50
Rompecabezas de Pitágoras: Grupo B----------BLM 51
Rompecabezas de Pitágoras B y Actividades----------BLM 52
Pythagoras en el Geoboard----------BLMs 53.1-2
Inverse del teorema de Pitágoras----------BLM 54

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

CONTENIDO

Sesión siete

Formas de papel picado----------BLMs 55.1-3
Actividades de papel picado----------BLMs 56.1-3
Simetría y asimetría en la naturaleza----------BLMs 57.1-6
Explorando simetrías con bloques de patrones----------BLMs 58.1-2
Espejos embisagrados y bloques de patrones----------BLM 59
Calidoscopios simples ----------BLMs 60.1-3
Calidoscopio de tres espejos----------BLM 61
Simetrías en el plano----------BLM 62
Semejanza----------BLM 63

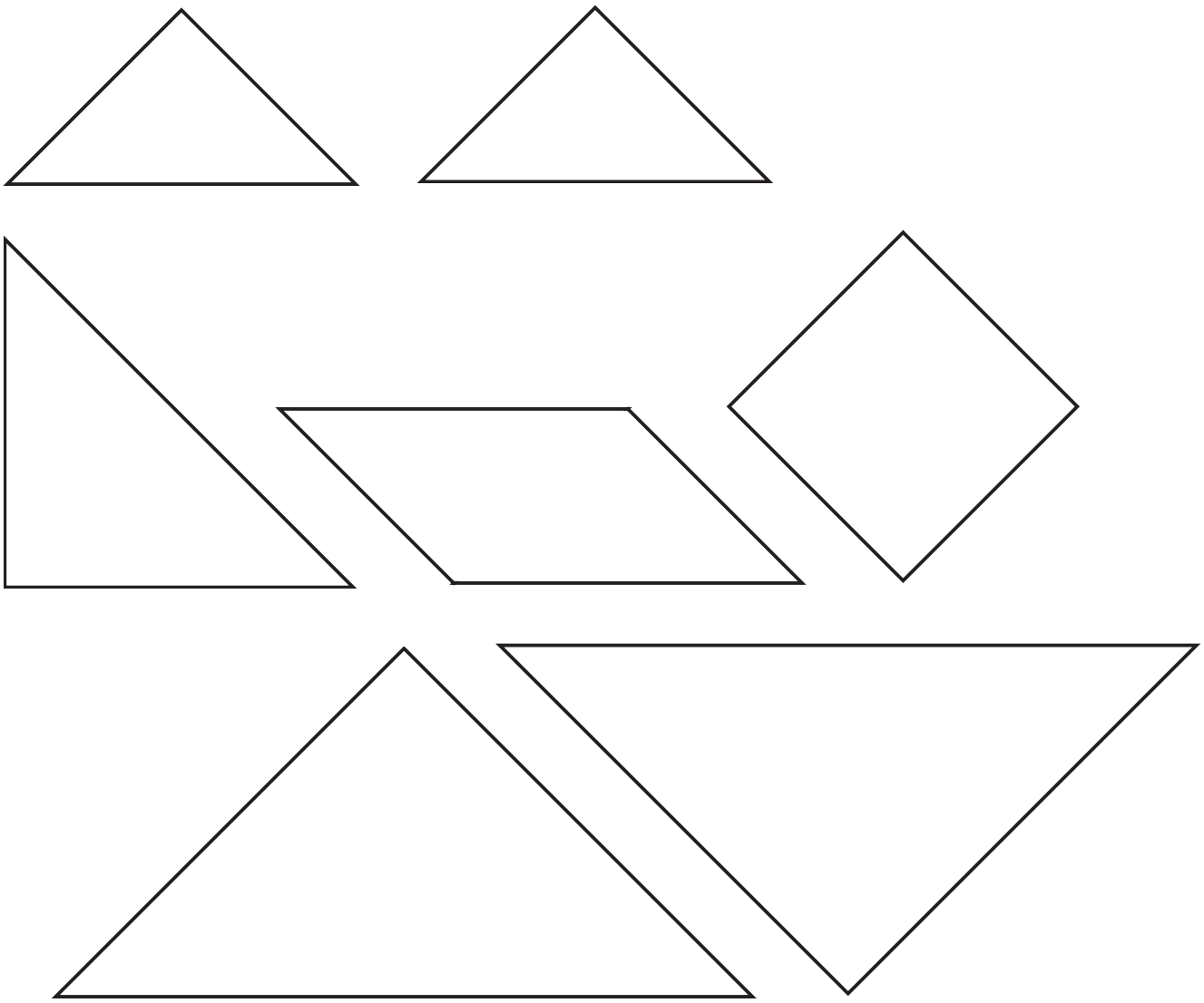
Sesión ocho

Poliedros regulares----------BLMs 64.1-2
Construcción de los poliedros regulares----------BLMs 65.1-2
Planos para poliedros----------BLMs 66.1-6
Solamente cinco poliedros regulares----------BLMs 67.1-4
Redes para el cubo----------BLM 68
Un tetraedro con un billete de un dólar----------BLMs 69.1-2
Tetraedro hechos de un sobre----------BLM 70
Poliedros regulares con varillas de madera----------BLMs 71.1-3
Octaedro de origami----------BLMs 72.1-3

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Tangrams: Rompecabezas con formas geométricas

Un juego de tangramas está formado por siete piezas, éstas serán proporcionadas por el instructor para hacer la actividad. También puede fotocopiar esta página, pegarla en cartulina, y recortar las figuras para hacer su propio juego. Los tangramas también se pueden comprar y son bastante baratos (un juego individual puede ser obtenido por aproximadamente $1 de compañías de materiales educativos como Nasco).



Los niños deben tener la oportunidad de jugar primero con las piezas de los tangramas y formar rompecabezas como el que se muestra más adelante. Al formar los rompecabezas, los niños se familiarizan con las formas geométricas que forman parte del juego de tangramas. Ellos pueden así aprender cómo algunas de las piezas combinadas pueden formar otras piezas. También aprenden a ver formas geométricas que son parte de otras figuras. Los tangramas se pueden usar para proporcionar un ambiente matemático informal.

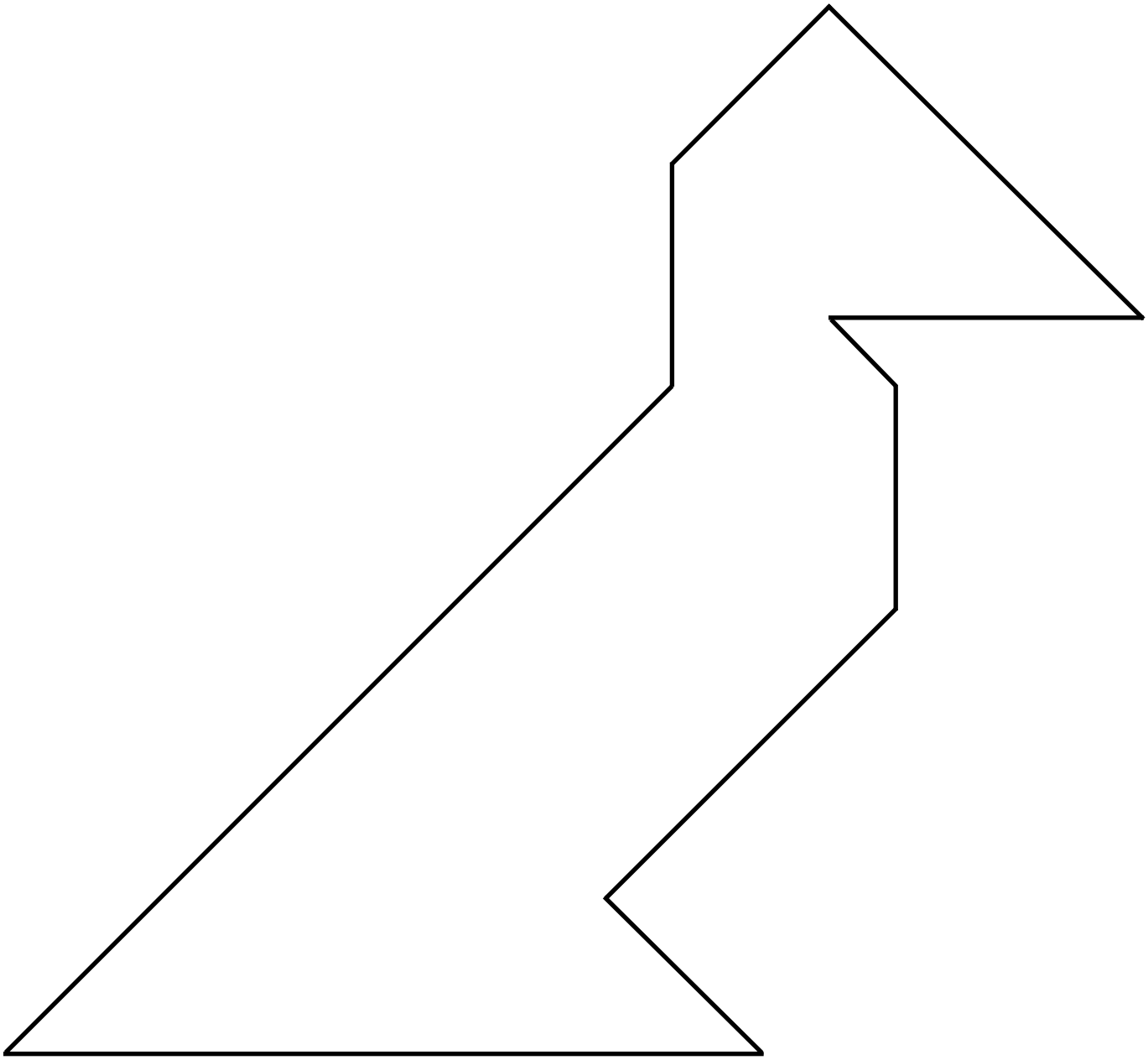
Estas actividades para los participantes son del mismo tipo que las que ellos pueden ofrecer a sus propios hijos. Los participantes deben tener la oportunidad de hacer estas actividades primero.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Formas del pájaro

Actividad inicial

Use las siete piezas del tangrama para llenar la forma de un pájaro. Intente encontrar la solución por sí mismo antes de ver la solución al final.



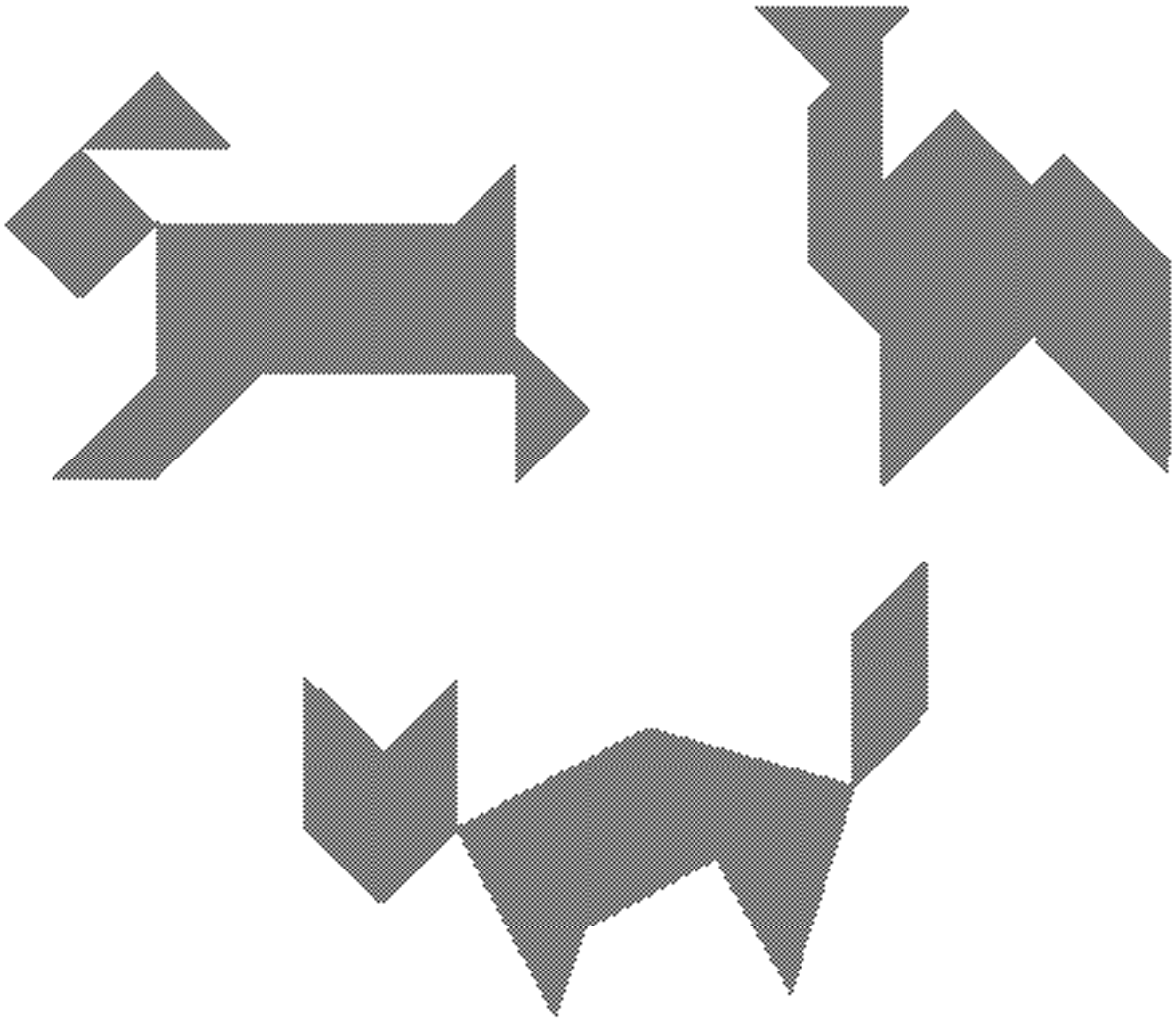
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividades adicionales con tangramas

Se pueden adaptar actividades con tangramas para niños de diferentes edades. Una actividad para niños pequeños (de Kindergarten o primer año), es darles el contorno de una forma para que la llenen con las piezas del tangrama, de modo que la solución está indicada con líneas punteadas. Esta actividad ayuda a los niños a reconocer formas, y hacer una correspondencia de las piezas en la solución. Los niños deberán rotar algunas de las piezas, y en algunos casos deberán voltear alguna de las piezas para que encaje.

Actividad adicional

Para hacer la actividad más difícil, se puede dar el contorno pero a una escala diferente.

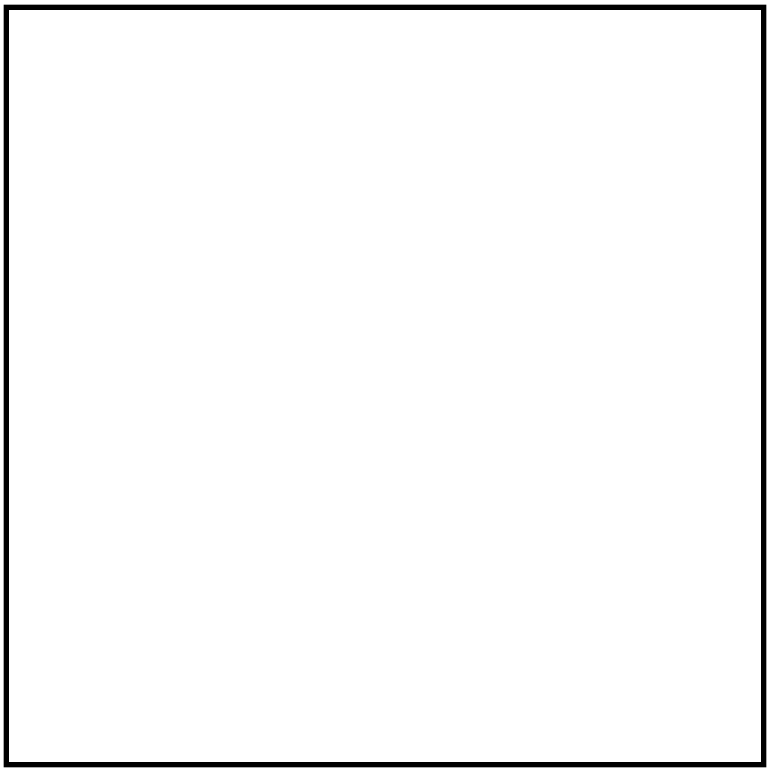


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Exploraciones geométricas con tangrams

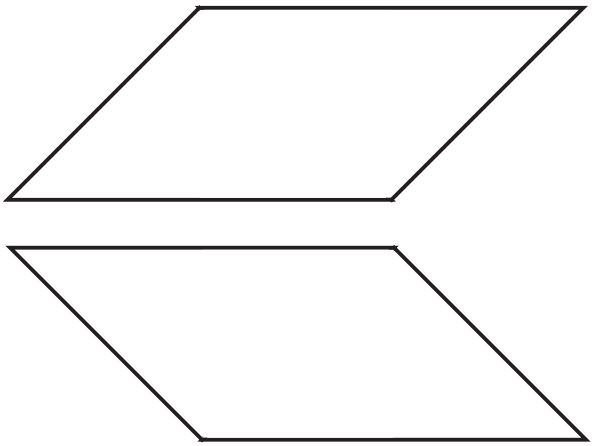
Actividad 1

Llene el contorno del cuadrado grande del tangrama (se necesitan las siete piezas). Para niños mayores esta actividad puede ser bastante difícil si sólo se muestra el contorno de la solución de modo que los niños tengan que encontrar cómo van las piezas acomodadas adentro. Intente llenar el cuadrado por sí mismo antes de ver la solución al final.



Para niños pequeños en Kindergarten o primer año, una actividad apropiada es proporcionar el contorno con la solución como se muestra al final y dejar que ellos pongan las piezas.

Note que el paralelogramo es la única pieza del tangrama que no es simétrica. Debido a esto, algunas veces necesitará voltear el paralelogramo para poderlo acomodar en un espacio en forma de paralelogramo.



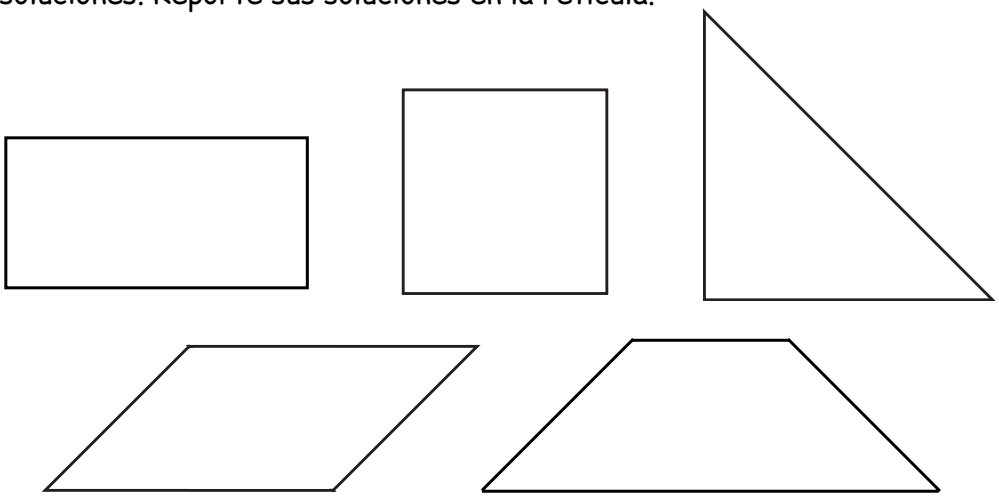
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Exploraciones geométricas con tangrams

Las actividades para niños en los grados más avanzados de primaria (cuarto y quinto grado) pueden incluir cambio de escala. A los niños se les proporcionan las formas que hay que armar, pero a diferente escala. Esto es, la forma mostrada no está a la escala requerida.

Actividad 2

Utilice sólo el triángulo mediano y los dos triángulos más pequeños para formar las siguientes figuras (las figuras no están mostradas en su tamaño real). Intente resolver los problemas por sí mismo antes de ver las soluciones. Reporte sus soluciones en la retícula.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

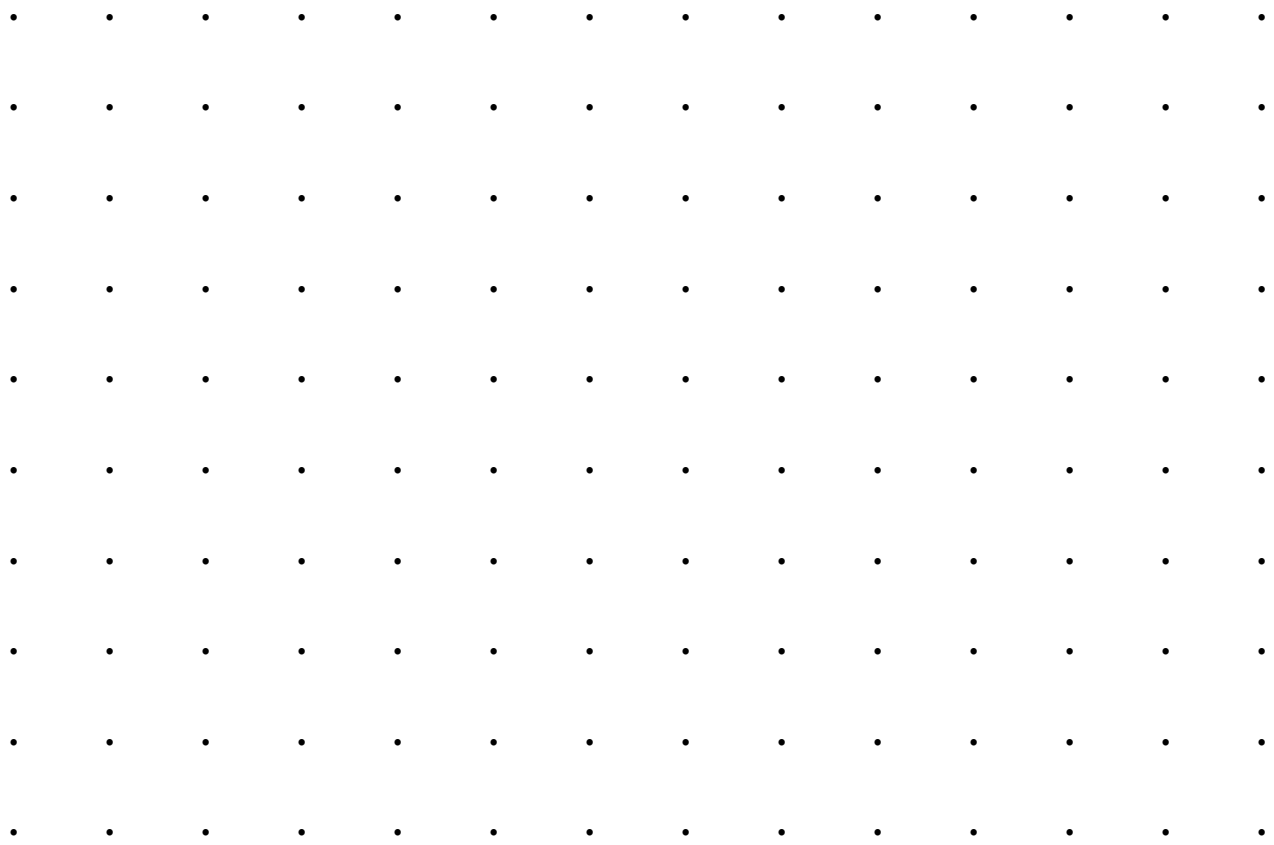
Exploraciones geométricas con tangrams

Actividad 3

Esta actividad es apropiada para alumnos en los grados cuarto y quinto.
Los tangramas también se pueden utilizar para plantear problemas donde más de una solución es posible, o donde una solución es posible sólo si modificamos la condición del problema.
Determine si se puede formar un cuadrado con exactamente

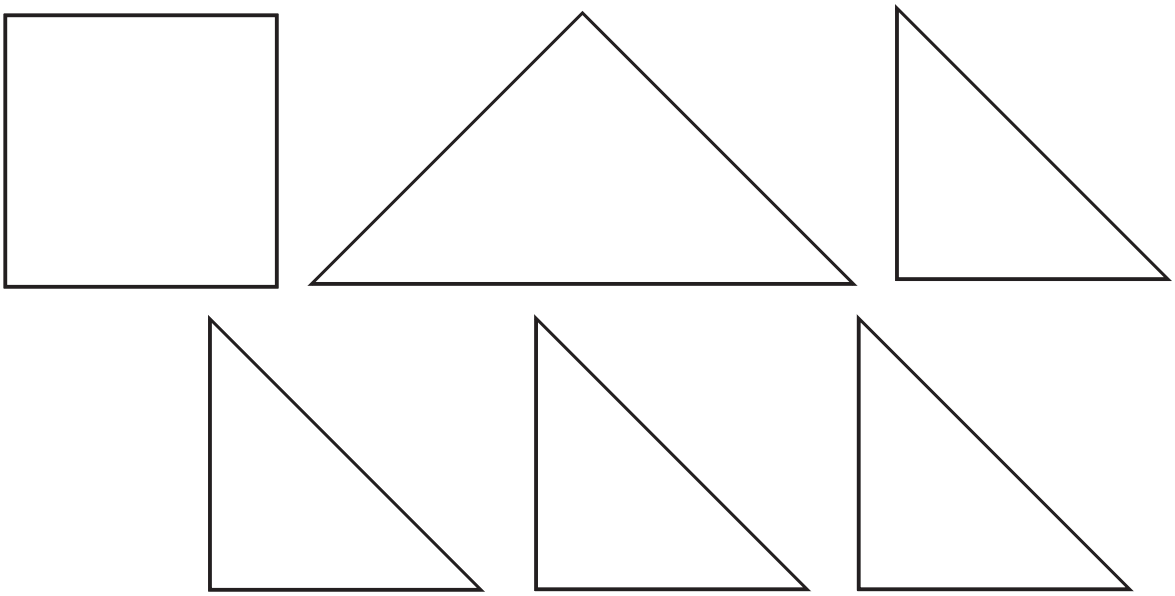
a) una pieza
b) dos piezas
c) tres piezas
d) cuatro piezas
e) cinco piezas
f) seis piezas
g) siete piezas

Para cada caso encuentre tantas soluciones como sea posible. Use la retícula para reportar sus soluciones.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Figura 1
El conjunto de figuras de cartulina usados en la actividad.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geometría en práctica

Las actividades descritas aquí son actividades de geometría que son creativas, informales, y intuitivas que enfatizan las habilidades de pensamiento de un nivel más alto. Con estas actividades los niños desarrollan conceptos spaciales como la conservación de área--si cortemos una figuras en dos partes y arrelgamos las piezas, obtendríamos otra figura que tiene el mismo área aunque puede parecer más grande. Los niños de Kinder pueden hacer las primeras cinco actividades en una sesión de 20-30 minutos. Se puede usar y aceptar lenguaje informal como "el triángulo pequeño" en este nivel. Se puede aumentar el número de actividades para los grados más avanzados. Se puede ajustar las actividades para cada grado al añadir más vocabulario, y una descrpción más precisa de las figuras. Para las actividades, se usa triángulos isoceles derechas de dos lados y un cuadro los dos cortados de cartulina.

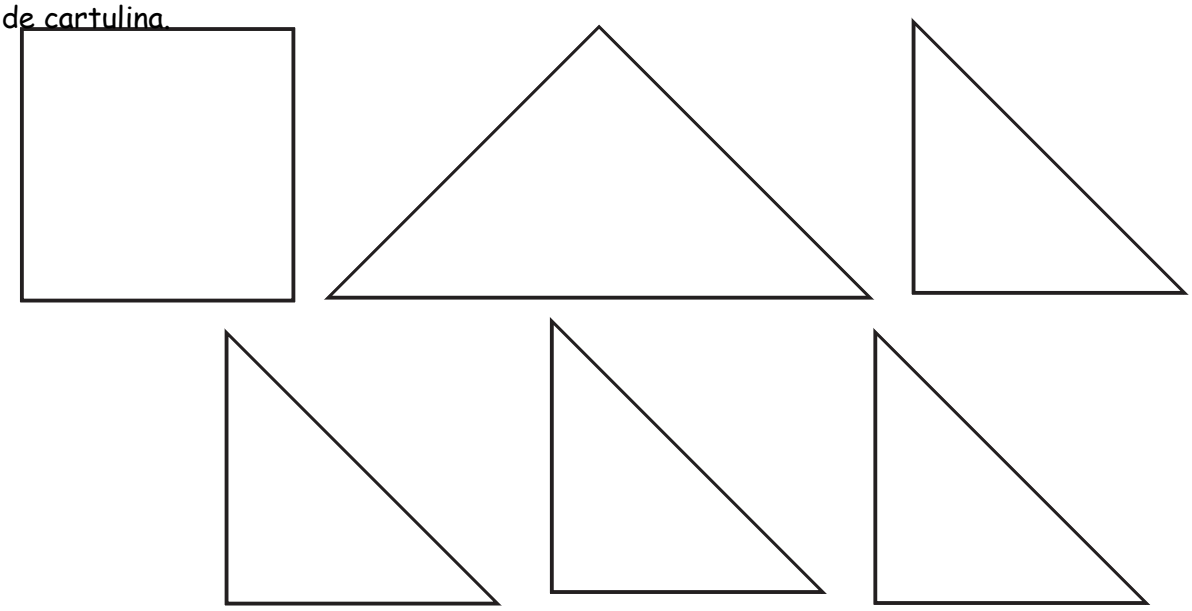


Figura 1. Figuras de cartulina que se usa para las actividades.

Actividad 1

1) Use el cuadro de cartulina para cubrir el cuadro en Figura 2.
   - *¿Qué puede decir de la figura y el tamaño de las dos figuras?*
   - *¿Qué puede decir sobre sus áreas?*

2) Use el cuadro de cartulina para cubrir el cuadro en Figura 3.
   - *¿Qué puede decir de las dos figuras?*
   - *¿Qué tipo de forma es la figura 3?*

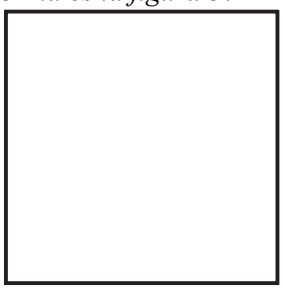


Figura 2

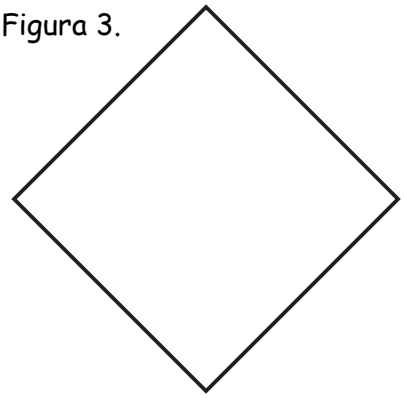


Figura 3

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geometría en práctica

Actividad 2

1) . Use uno de los triángulos pequeños para cubrir el triángulo en Figura 4.
   - *¿Qué puede decir de los dos triángulos?*

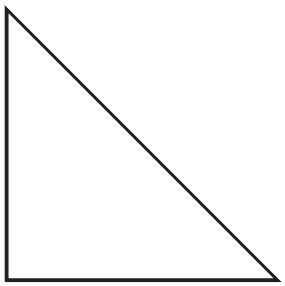


Figura 4

2) Ahora cubra cada uno de los triángulos en la Figura 5 con el triángulo de cartulina.
   - *.¿Qué puede decir de todos los triángulos?*
   - *¿Altere los triángulos la posición y la orientación?*

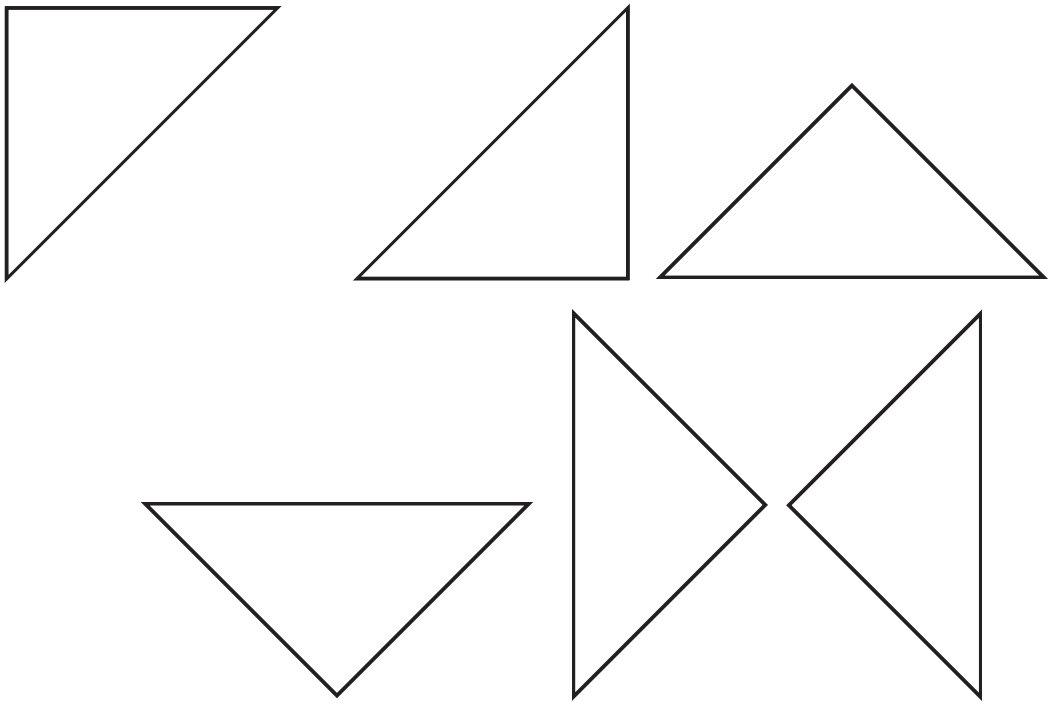


Figura 5

Actividad 3

1) Use dos de los triángulos pequeños para cubrir el cuadro de Figura 2.
   - *¿Qué puede decir del área del triángulo pequeño y el área del cuadro?*

2) Use los mismos dos triángulos para cubrir el cuadro en Figura 3.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geomtría en práctica

Actividad 4

Agarre el triángulo grande de cartulina y úselo para cubrir cada uno de los triángulos en Figura 6.

- *¿Qué puede decir de todos los triangulos?*

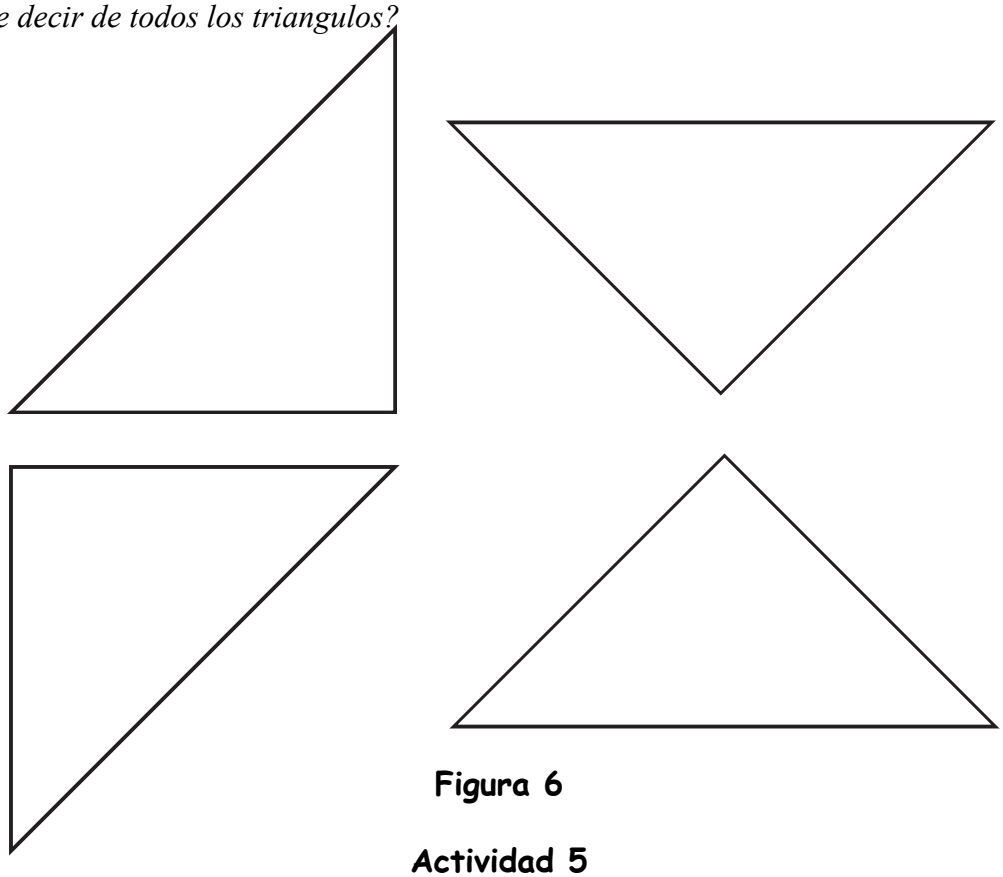


Figura 6

Actividad 5

1) Use dos triángulos pequeños para cubrir cada uno de los triángulos.
2) Compare el área del triángulo pequeño con el área del triángulo grande.

Actividad 6

1) Cubra el cuadro en Figura 7 con dos triángulos pequeños, y use los mismos dos triángulos para cubrir el triángulo grande (Figura 8).
2) Compare el área del cuadro con el área del triángulo grande.

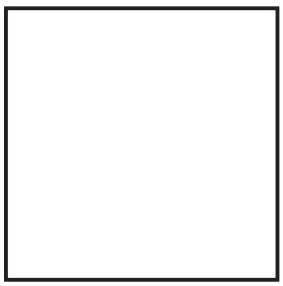


Figura 7

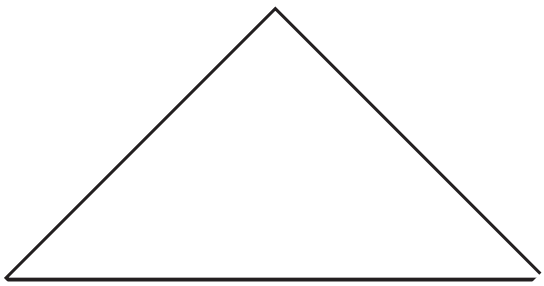


Figura 8

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geometría en práctica

Actividad 7

Cubra las formas en Figura 9 con dos triángulos pequeños de Figura 1, para ver que estas formas tienen el mismo área del cuadro.

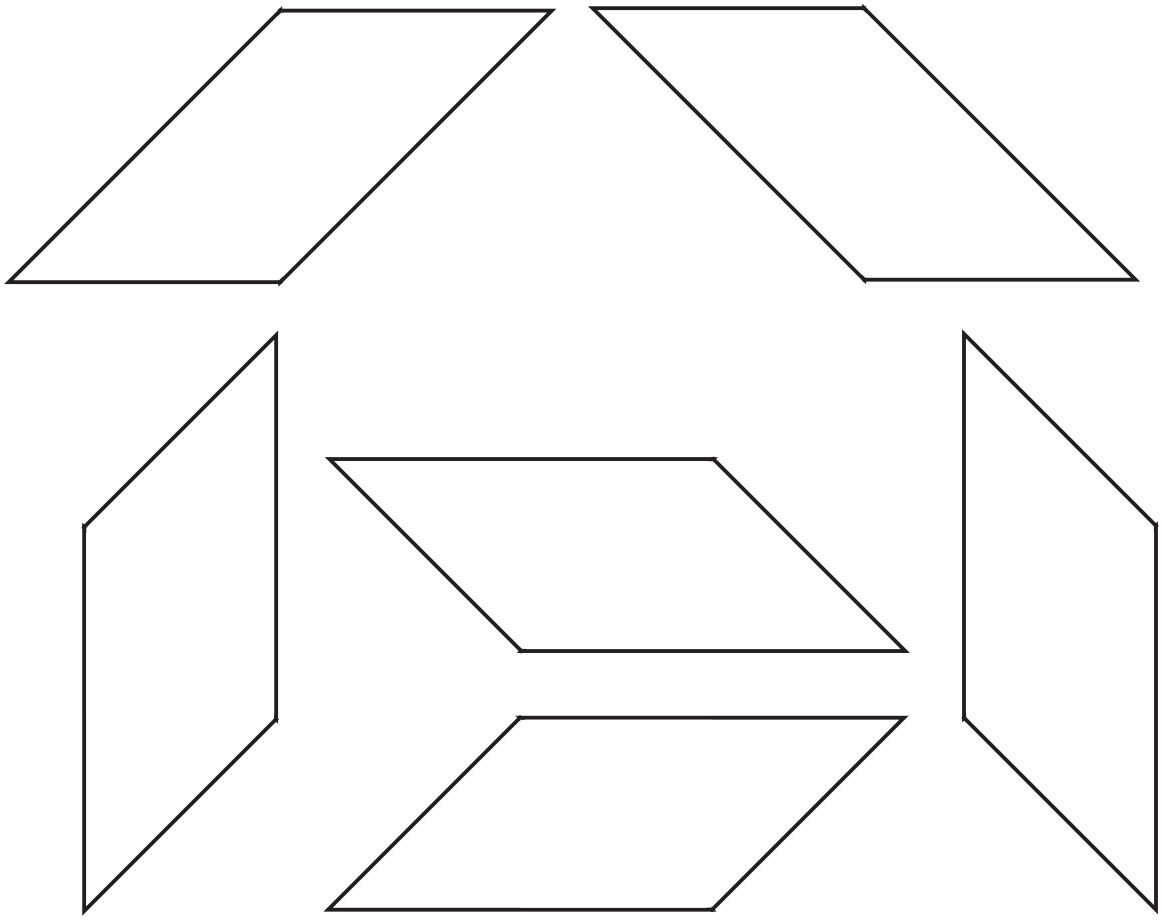


Figura 9

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geometría en práctica

Actividad 8

Cubra las formas en Figura 9 con dos tríangulos pequeños de Figura 1, para ver que estas formas tienen el mismo área del cuadro.

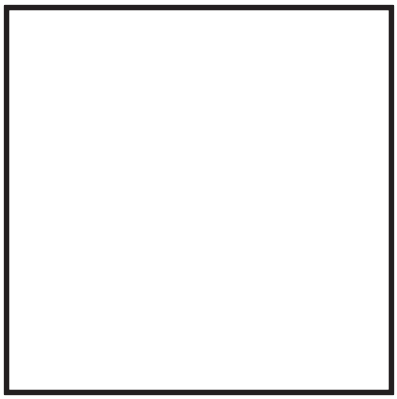


Figura 10

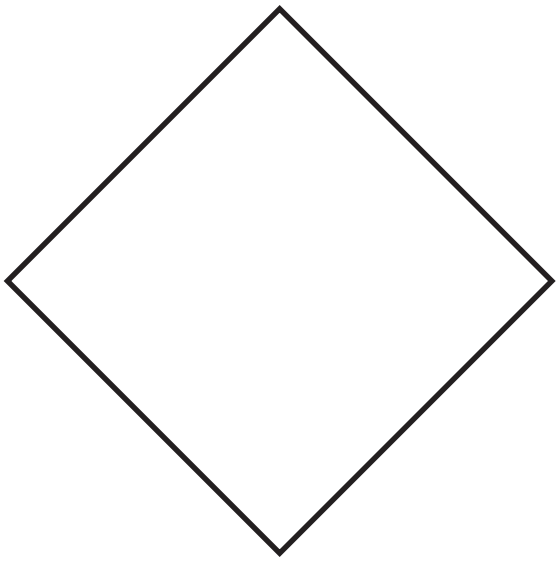


Figura 11

Actividad 9

1) Cubra cada cuadro pequeño con dos triángulos pequeños y use los triángulos pequeños para cubrir el cuadro grande.
2) Compare el área de los dos pequeños cuadros con el área del cuadro grande en Figura 12.

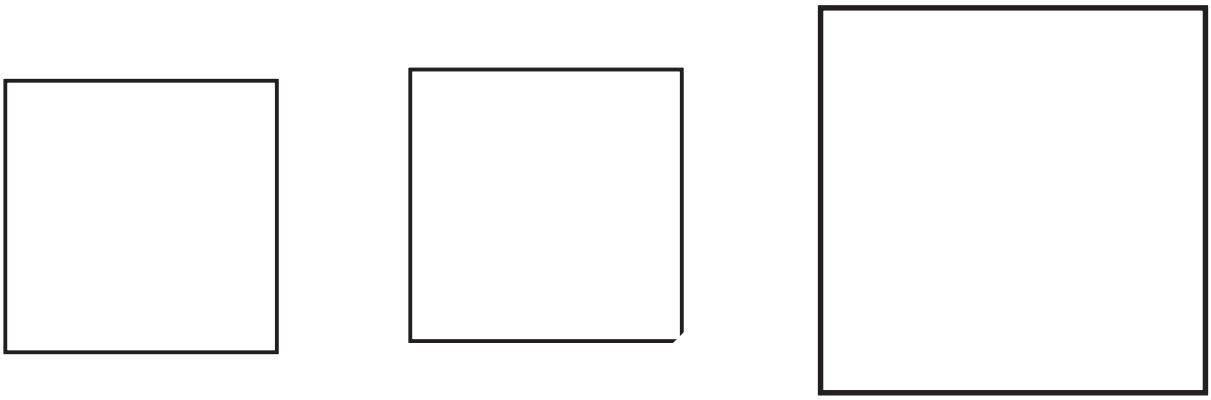


Figura 12

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geometría en práctica

Actividad 10

1) Use los cuatro triángulos pequeños para cubrir los dos cuadros pequeños en Figura 13.
2) Con los mismos cuatro triángulos cubra el cuadro grande.
3) Compare los áreas de los dos cuadros pequeños con el área del cuadro grande.

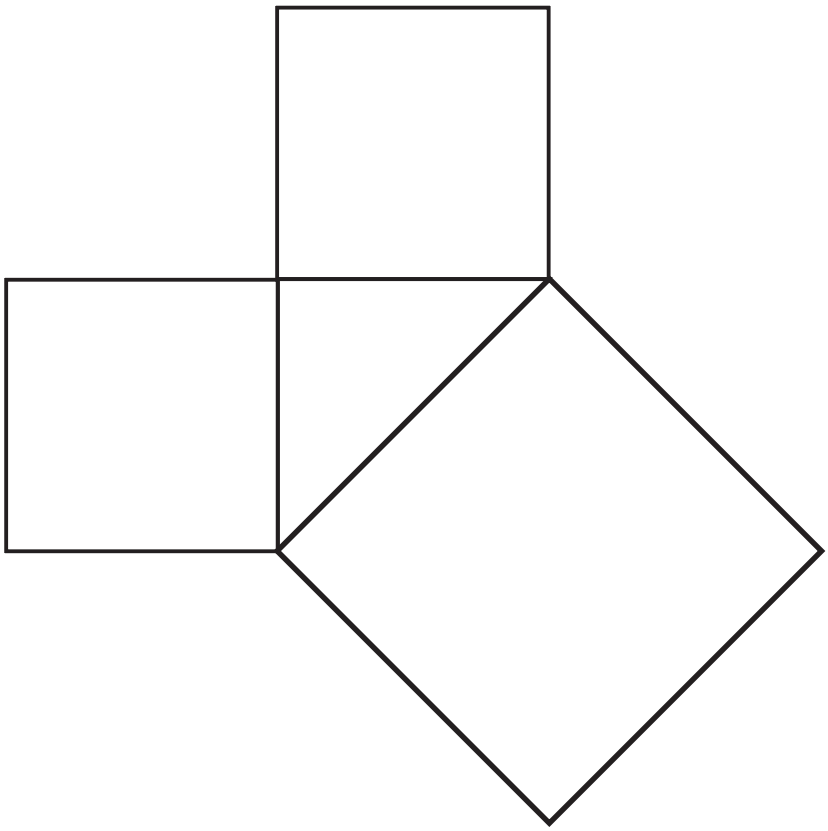


Figura 13

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Experimentando para descubrir y comprobar propiedades de los cuadrados

El papel encerado que viene en cuadrados (patty paper) se puede utilizar para enfocar la atención en las partes del cuadrado, tales como lados y ángulos, y sus propiedades. Al doblar el cuadrado y sobreponer las diferentes partes podemos ver la relación entre ellas.

Actividad 1

Doble el cuadrado a la mitad como se muestra en la Figura 1, de modo que uno de los lados del cuadrado se superponga con el lado opuesto (los lados *a* y *d* son lados opuestos).

- *¿Qué puede decir de las longitudes de los lados opuestos de un cuadrado?*
- *¿Qué puede decir del tamaño de los ángulos consecutivos de un cuadrado?*

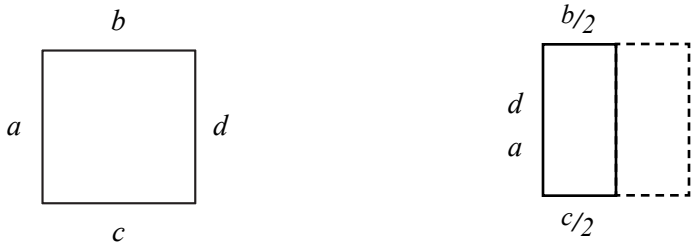


Figura 1

Actividad 2

1) Con un cuadrado diferente doble a lo largo de la diagonal, de modo que una esquina del cuadrado se superponga perfectamente sobre la esquina opuesta.
   - *¿Qué puede decir acerca de los ángulos opuestos?*
   - *¿Qué puede decir acerca de los lados adyacentes de un cuadrado?*

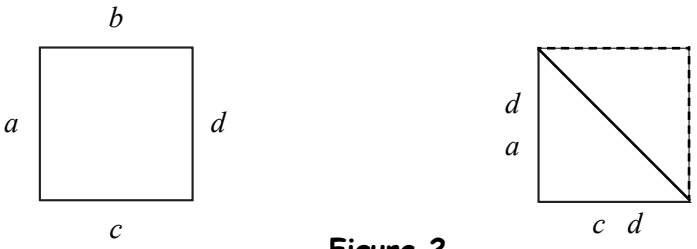


Figura 2

   - *¿Es suficiente la información que tiene hasta ahora para afirmar que todos los lados de un cuadrado son iguales? ¿Por qué?*
   - *¿Podemos afirmar que todos los ángulos son iguales? ¿Por qué?*

2) Convénzase que en un cuadrado, la diagonal corta el ángulo recto en dos ángulos iguales.

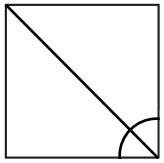


Figura 3

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Verificando las propiedades de cuadros

Actividad 3

1) Encuentre el centro del cuadrado doblando por en medio y abriendo la hoja y doblando por la mitad en la otra dirección.
2) Las líneas de en medio forman cuatro cuadrados más pequeños. Compare el área de cada uno de los cuadrados pequeños con el área del cuadrado original.

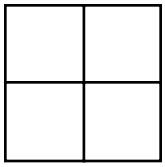


Figura 4

- *¿Qué puede decir del ángulo formado por las dos líneas de en medio?*
- *¿Qué puede decir de las longitudes de los lados de los cuatro cuadrados pequeños?*

Actividad 4

1) Encuentre el centro del cuadrado doblando la hoja en dos diagonales.
2) Compruebe que en un cuadrado las diagonales se cortan a la mitad.
3) Verifique que las diagonales de un cuadrado se intersecan en ángulos rectos.
4) Use dos diagonales para formar cuatro triángulos rectángulos.
   - *¿Qué puede decir sobre el área de estos cuatro triángulos?*

   Compare el área de un triángulo al área del cuadro original.

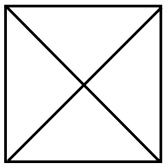


Figura 5

5) Compruebe que las diagonales y las líneas paralelas medias se intersecan en el mismo punto.

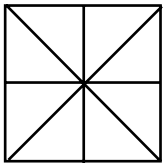


Figura 6

Actividad 5

1) Compruebe que uno de los triángulos formados por las dos diagonales tiene la misma área que uno de los cuadrados pequeños formados por las paralelas medias.
2) Compare las áreas sombreadas.

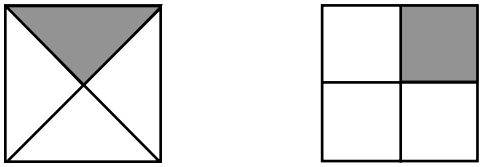


Figura 7

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Verificando las propiedades de cuadros

Actividad 6

1) Encuentra el centro del cuadrado doblando a la mitad en dos direcciones.
2) Ahora dobla las esquinas del cuadrado de modo que se encuentren en el centro. Se forman cuatro triángulos rectángulos y un cuadrado
3) Compara el área de este cuadrado con el área del cuadrado original.

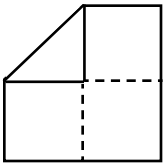


Figura 8
Una esquina doblada

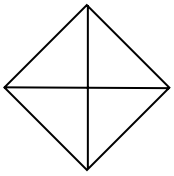


Figura 9
Cuatro esquinas dobladas

Actividad 7

Los matemáticos han acordado que la medida de un ángulo recto es 90°.

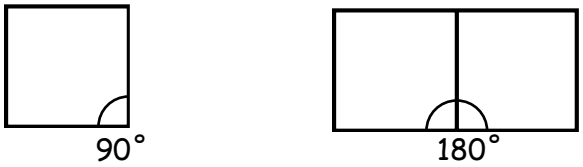


Figura 10

1) Comprueba que dos ángulos rectos puestos juntos forman una línea recta. La medida de un ángulo extendido es por tanto 180°.

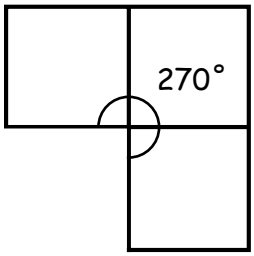


Figura 11
Tres ángulos rectos adyacentes

2) Comprueba que se pueden acomodar exactamente cuatro ángulos rectos juntos. La vuelta completa es por tanto 360°.

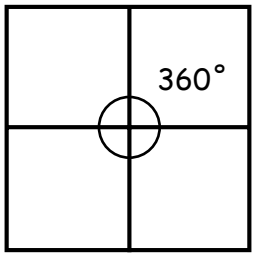


Figura 12
Cuatro ángulos rectos adyacentes

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un barco de dos chimeneas

Las actividades de doblar papel para hacer barcos y aviones ofrecen la oportunidad para los niños pequeños de desarrollar intuiciones y familiarizarse con situaciones geométricas. Las instrucciones y fotografías a color de cada uno de los pasos para doblar el barco se pueden encontrar en http://www.public.asu.edu/~aaafp/barco/smkst.html

Empiece con una hoja de papel cuadrada (papel origami). Encuentre el centro del cuadrado doblando por en medio y abriendo la hoja y doblando por la mitad en la otra dirección. Note que se forman cuatro cuadrados (figura 2). Compare el área de cada uno de estos cuadrados con el área del cuadrado original.

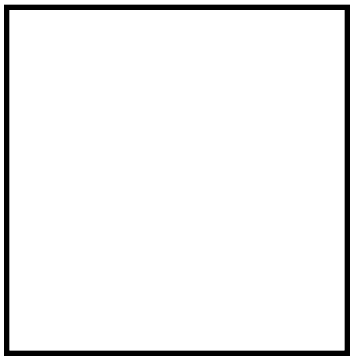


Figura 1. El cuadrado original

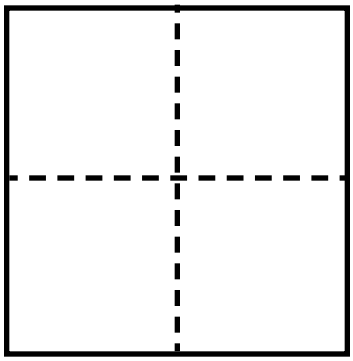


Figura 2. Dos dobleces a lo largo de las líneas de en medio

Doble una esquina de modo que el vértice coincida con el centro (figura 3). Se obtiene un triángulo rectángulo. Doble las otras tres esquinas (figura 4). Obtenga un cuadrado formado por cuatro triángulos rectángulos. Compare el área del cuadrado así doblado con el área del cuadrado original.

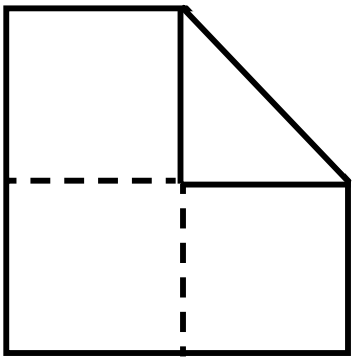


Figura 3

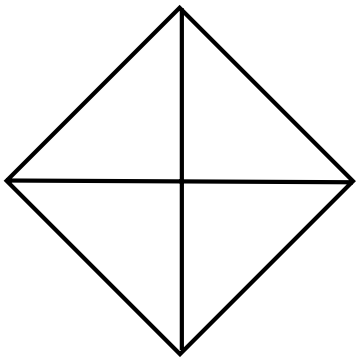


Figura 4

Voltee el papel doblado de modo que el lado de abajo quede arriba. Doble una esquina hacia el centro (figura 5). Doble las otras esquinas hacia el centro (figura 6). Obtenga otra vez un cuadrado.Compare el área de este cuadrado con el área del cuadrado original.

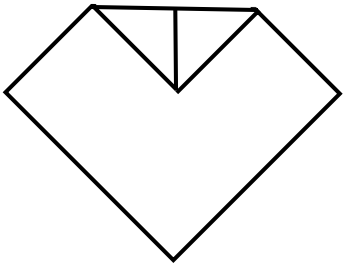


Figura 5

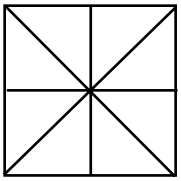


Figura 6

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un barco de dos chimeneas

Voltee el papel otra vez. Debe tener cuatro aletas en la parte de arriba (figura 7). Doble una de las esquinas hacia el centro (figura 8). Doble las otras tres esquinas (figura 9).

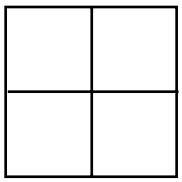


Figura 7

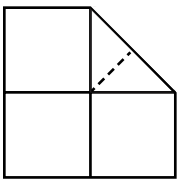
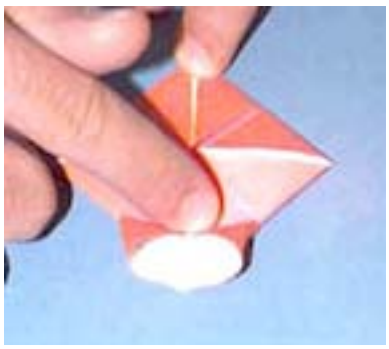


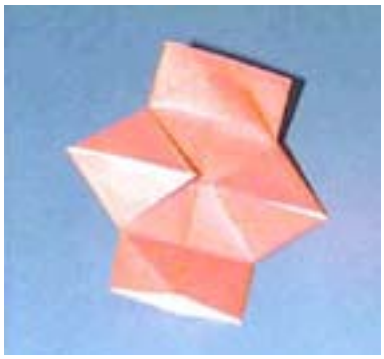
Figura 8

Figura 9

Voltee el papel otra vez. Abra dos de los cuadrados, de esquinas opuestas, para formar las dos chimeneas (figura 10).



10a



10b

Figura 10. Se forman las dos chimeneas

Conforme dobla el barco para poner las chimeneas una al lado de la otra, empuje la proa y la popa para terminar el barco (figura 11).

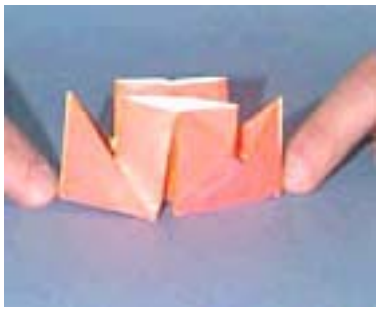


Figura 11

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Nivel 1 (Nivel básico): Visualización

Las figuras geométricas son contempladas como un todo. El estudiante identifica las figuras por su apariencia global. Identifica partes de una figura, pero no analiza las figuras en términos de sus componentes. El alumno identifica, nombra, compara las figuras geométricas y opera sobre ellas de acuerdo con su apariencia.

A este nivel, los estudiantes pueden pensar que dos figuras son diferentes porque se ven diferentes, sin enfocar su atención en los lados y los ángulos. Es común que algunos niños llamen a la segunda figura un diamante en vez de un cuadrado, porque se ve diferente.

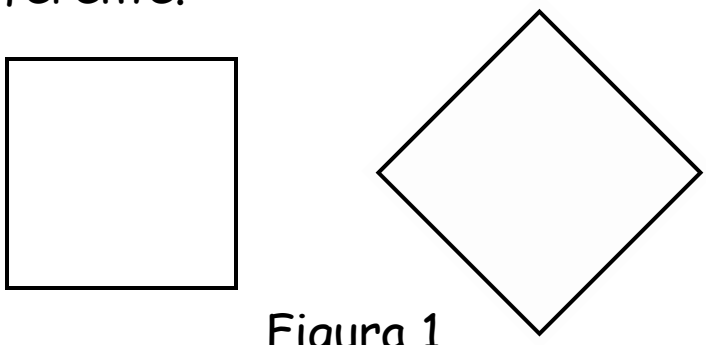


Figura 1

Nivel 2: Análisis de propiedades

Un estudiante puede analizar las figuras en términos de sus componentes, describir sus partes y alistar sus propiedades. Se utilizan descripciones más que definiciones. El estudiante descubre o prueba propiedades o reglas de manera empírica (por ejemplo doblando, midiendo, utilizando una cuadrícula, o un diagrama).

A este nivel un estudiante se puede dar cuenta que ambas formas en la figura 1 son cuadrados ya que ambas tienen cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Nivel 3: Deducción informal

Un estudiante puede entender el papel de las definiciones; puede establecer la relación entre las figuras; puede ordenar jerárquicamente las figuras de acuerdo con sus características; puede deducir hechos de manera lógica de hechos que ha aceptado previamente usando argumentos informales.

A este nivel los alumnos se dan cuenta que un cuadrado es una clase especial de rectángulo, ya que tiene cuatro lados y cuatro ángulos rectos, las características que definen un rectángulo.

Nivel 4: Deducción axiomática

Un alumno puede entender el significado de la demostración en el contexto de definiciones, axiomas, y teoremas. El estudiante demuestra teoremas de manera deductiva a partir de los axiomas o de teoremas demostrados previamente.

Algunos enunciados se aceptan como axiomas, esto es, como evidentes y sin necesidad de demostración. Todos los teoremas se derivan de estos axiomas o de teoremas previamente demostrados. Este nivel corresponde a un curso tradicional de geometría formal en el nivel medio superior.

Nivel 5: Rigor

Un estudiante puede entender las relaciones entre los diferentes sistemas axiomáticos. El estudiante establece teoremas en diferentes sistemas de postulados, y analiza y compara estos sistemas.

Este nivel se alcanza sólo después de que los alumnos han tenido la oportunidad de estudiar tanto la geometría Euclidiana como la no-Euclidiana en tratados axiomáticos. Esto corresponde a un curso avanzado en la universidad.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Niveles de Van Hiele de desarrollo del pensamiento geométrico

El modo de pensar de los niños con respeto a los objetos geométricos cambia con que ellos crezcan y tengan las oportunidades de aprendizaje apropiada. En esta sección vamos a describir los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico por los que pasan las personas. Es importante darse cuenta que el pensamiento de los niños no se vuelve automáticamente más sofisticado cuando crecen. Además de la maduración, la instrucción juega un papel esencial. Cuando los alumnos no tienen las oportunidades para desarrollar su pensamiento geométrico, permanecen en el mismo nivel. Muchas personas se vuelven adultas pero continúan usando solamente formas básicas de pensamiento acerca de los objetos geométricos. Es importante que los padres entiendan cómo aprenden los niños y tengan ejemplos de actividades que pueden ser usadas con niños en diferentes niveles. Las actividades de este libro también están diseñadas para ayudar a los padres a desarrollar su propio pensamiento geométrico.

De acuerdo con Van Hiele (1986), hay cinco niveles de desarrollo en el pensamiento geométrico, que serán descritos brevemente a continuación (Fuys, Geddes, Tischler, 1988). En este libro presentaremos sólo actividades que corresponden a los tres primeros niveles. Los niveles 4 y 5 están más allá del alcance de este libro y se describen sólo para tener el cuadro completo. El nivel 4 corresponde a un curso tradicional de geometría formal en el nivel medio superior.

Vea página 2 con los niveles de Van Hiele.

Referencias

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents.* National Council of Teachers of Mathematics.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Academic Press.

Nota: Algunos autores (incluyendo a Van Hiele) numeran los niveles empezando en 0. En este curso usaremos el sistema de enumcración como está usado en las páginas de los niveles de Van Hiele.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Niveles de Van Hiele de desarrollo del pensamiento geométric

Nivel 1 (Nivel básico): Visualización. Las figuras geométricas son contempladas como un todo. El estudiante identifica las figuras por su apariencia global. Identifica partes de una figura, pero no analiza las figuras en términos de sus componentes. El alumno identifica, nombra, compara las figuras geométricas y opera sobre ellas de acuerdo con su apariencia.

A este nivel, los estudiantes pueden pensar que dos figuras son diferentes porque se ven diferentes, sin enfocar su atención en los lados y los ángulos. Es común que algunos niños llamen a la segunda figura un diamante en vez de un cuadrado, porque se ve diferente.

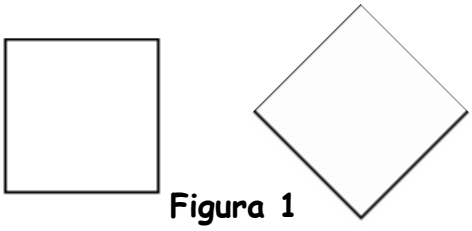


Figura 1

Nivel 2: Análisis de propiedades. Un estudiante puede analizar las figuras en términos de sus componentes, describir sus partes y alistar sus propiedades. Se utilizan descripciones más que definiciones. El estudiante descubre o prueba propiedades o reglas de manera empírica (por ejemplo, doblando, midiendo, utilizando una cuadrícula, o un diagrama).

A este nivel un estudiante se puede dar cuenta que ambas formas en la figura 1 son cuadrados ya que ambas tienen cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

Nivel 3: Deducción informal. Un estudiante puede entender el papel de las definiciones; puede establecer la relación entre las figuras; puede ordenar jerárquicamente las figuras de acuerdo con sus características; puede deducir hechos de manera lógica de hechos que ha aceptado previamente usando argumentos informales.

A este nivel los alumnos se dan cuenta que un cuadrado es una clase especial de rectángulo, ya que tiene cuatro lados y cuatro ángulos rectos, las características que definen un rectángulo.

Nivel 4: Deducción axiomática. Un alumno puede entender el significado de la demostración en el contexto de definiciones, axiomas, y teoremas. El estudiante demuestra teoremas de manera deductiva a partir de los axiomas o de teoremas demostrados previamente.

Algunos enunciados se aceptan como axiomas, esto es, como evidentes y sin necesidad de demostración. Todos los teoremas se derivan de estos axiomas o de teoremas previamente demostrados. Este nivel corresponde a un curso tradicional de geometría formal en el nivel medio superior.

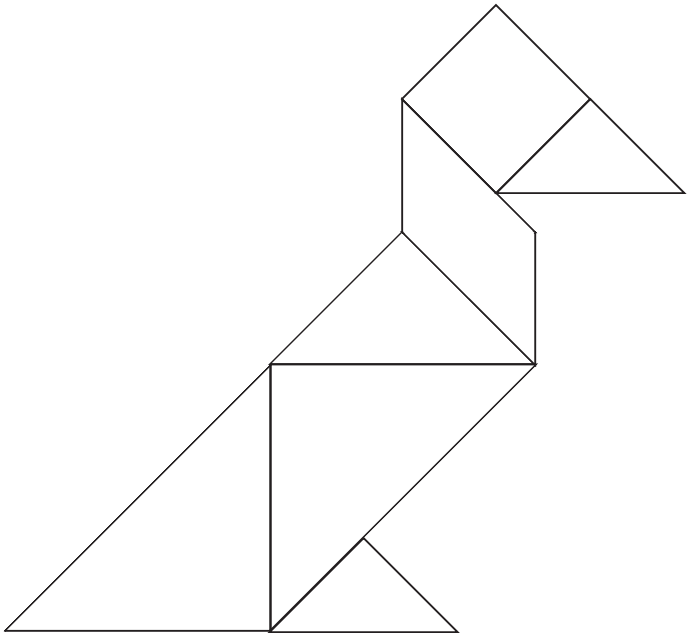
Nivel 5: Rigor. Un estudiante puede entender las relaciones entre los diferentes sistemas axiomáticos. El estudiante establece teoremas en diferentes sistemas de postulados y analiza y compara estos sistemas.

Este nivel se alcanza sólo después de que los alumnos han tenido la oportunidad de estudiar tanto la geometría Euclidiana como la no-Euclidiana en tratados axiomáticos. Esto corresponde a un curso avanzado en la universidad.

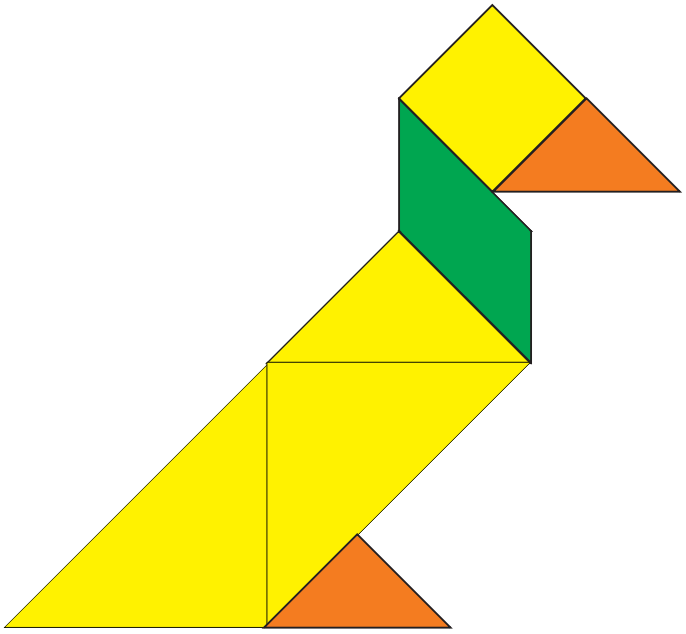
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Soluciones: Rompecabezas de tangramas

Soluciones a la actividad inicial: Forma del pájaro.



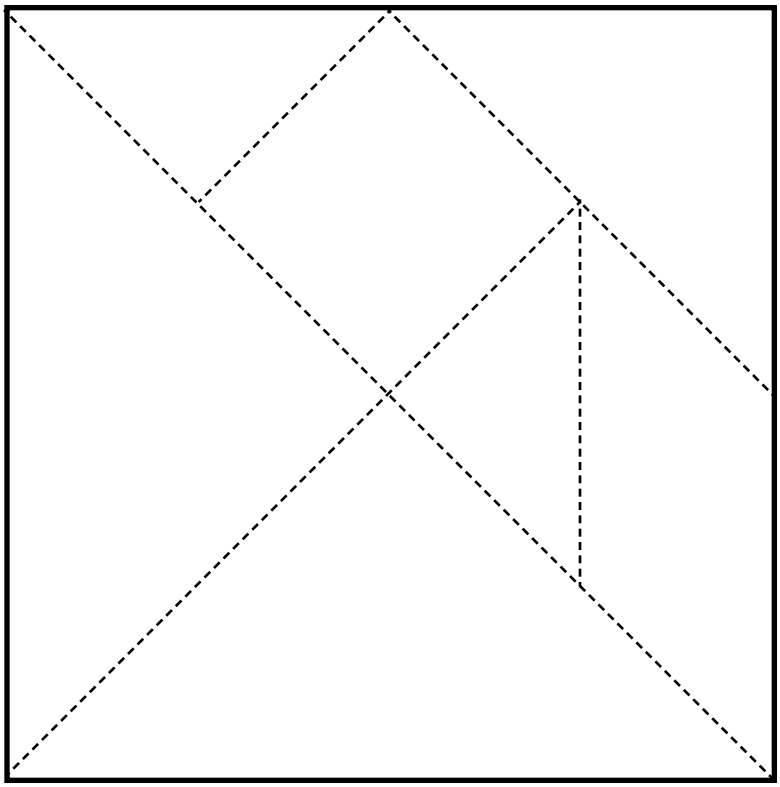
Los niños pueden usar colores para resaltar las diferentes piezas.
Pueden usar colores también para hacer el pájaro más bonito.



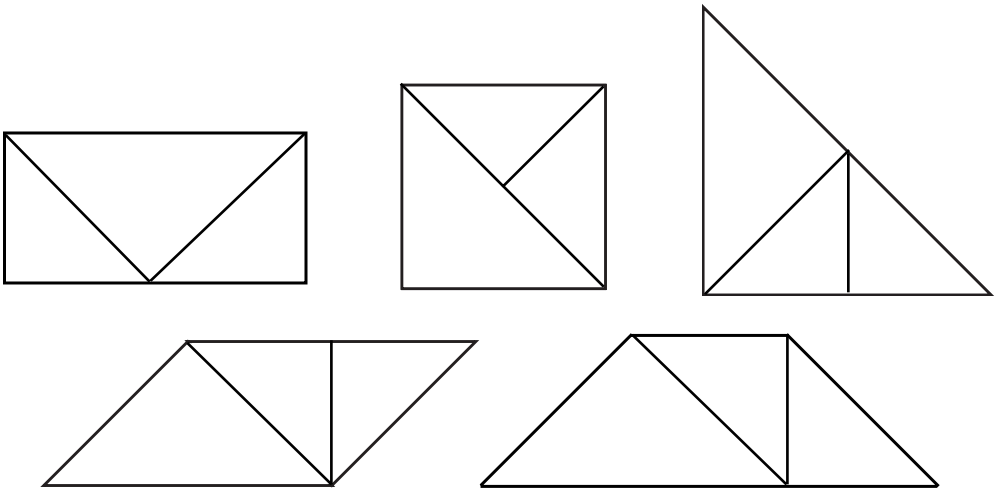
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Soluciones: Rompecabezas de tangramas

Solución para la Actividad 1: Exploraciones geométricas con tangrams



Solución para la Actividad 2: Exploraciones geométricas con tangrams



Nota para la Actividad 3. Todos los problemas se pueden resolver con un juego de tangramas, excepto el de formar el cuadrado con seis piezas. Para resolver este problema, utilice seis piezas de dos juegos de tangramas.

Referencias

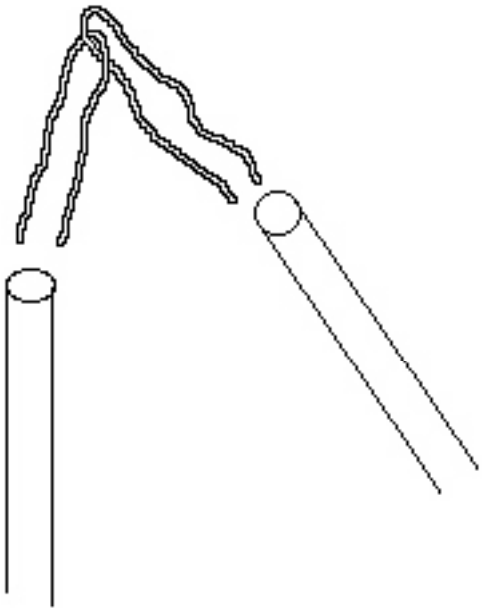
Cread, Ronald. *Tangrams—330 puzzles*. NY: Dover, 1980.

Stenmark, Jean Kerr, Thompson, Virginia, and Cossey, Ruth. *Matemáticas para la familia.*. Berkeley, CA: Lawrence Hall of Sciences, 1986.

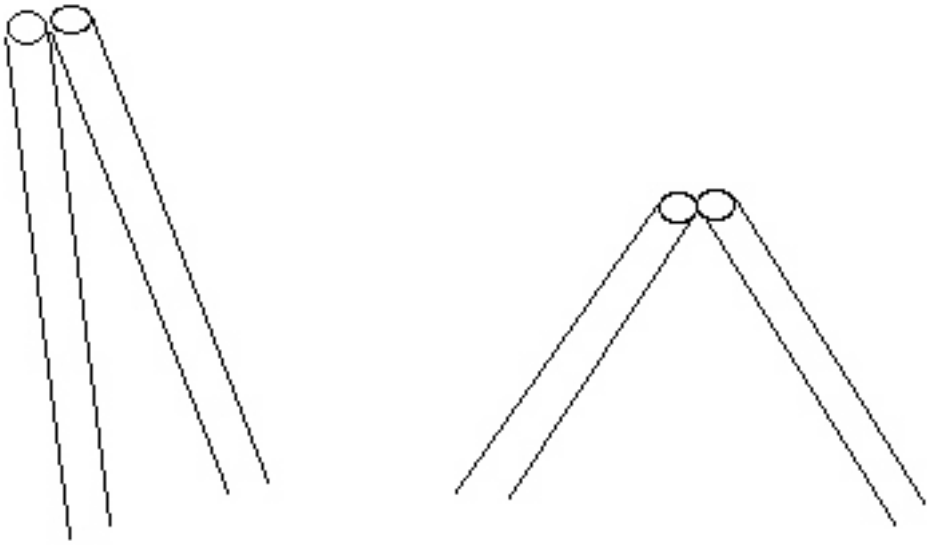
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Ángulos con popotes y pasadores

Una dos popotes con dos pasadores como se indica en la siguiente figura. Note cómo los pasadores están entrelazados.



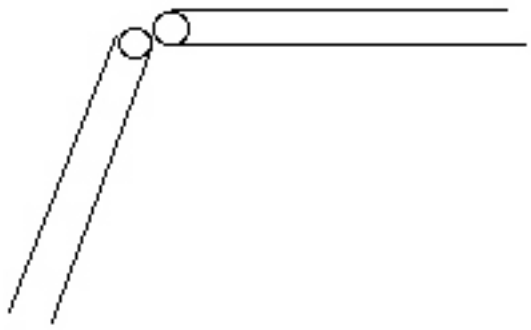
Los popotes representan los lados del ángulo, el punto en común es el vértice del ángulo. Empiece con los dos popotes muy pegados uno al otro. Así forman un ángulo agudo. La medida de este ángulo es pequeña.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

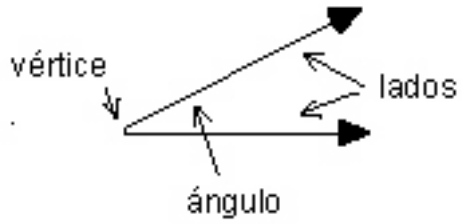
Ángulos con popotes y pasadores

Abra el ángulo para formar un ángulo más grande. Abra más hasta que forme un ángulo recto (un ángulo recto es el ángulo de una hoja rectangular de papel). Si abre más el ángulo, obtendrá ángulos obtusos.



Los partes de un ángulo

Un ángulo está formado por dos rayos o segmentos que tienen un vértice en común. El ángulo es la "abertura" entre los lados.



El tamaño de un ángulo depende de qué tan grande es la abertura, no de la longitud de los lados. En la siguiente figura, el ángulo de la derecha es mayor que el ángulo de la izquierda.

ángulo pequeño

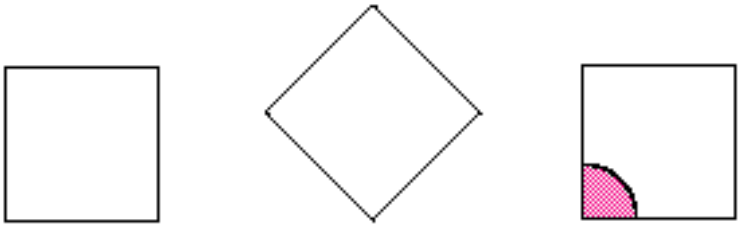
ángulo más grande

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Los ángulos de los bloques de patrones

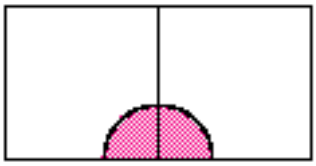
Actividad 1. El cuadrado

Un cuadrado tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales. Los ángulos de un cuadrado son de 90°.

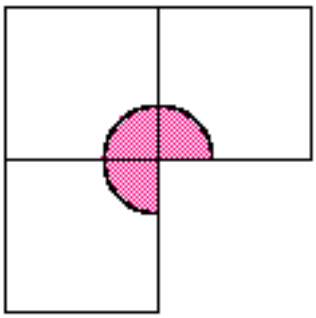


Cuadrados Un ángulo de 90°

Vamos a ver cómo los ángulos de varios cuadrados se pueden acomodar alrededor de un punto en común.

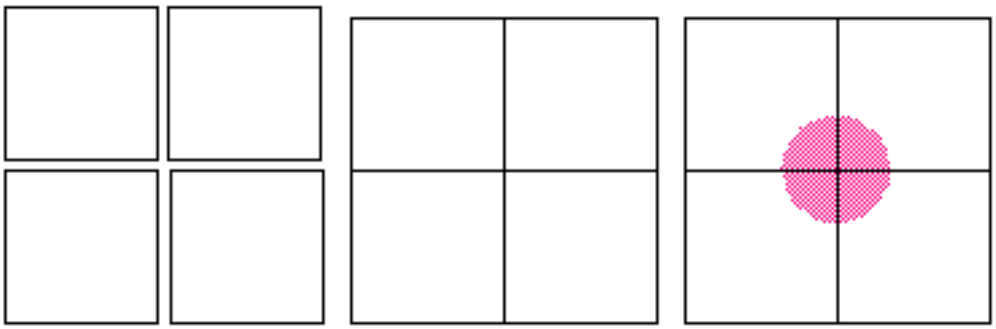


Dos ángulos rectos juntos forman una línea recta. La suma de los ángulos es 180°.



Tres ángulos rectos juntos suman 270°.

Si ponemos cuatro cuadrados alrededor de un punto caben perfectamente, y así podemos ver que la vuelta completa alrededor de un punto es 360°.



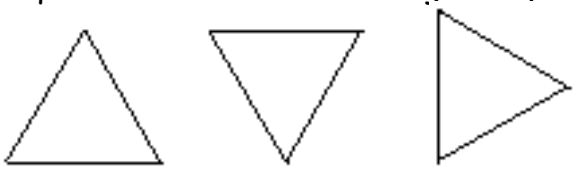
Un ángulo de 360°

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Los ángulos de los bloques de patrones

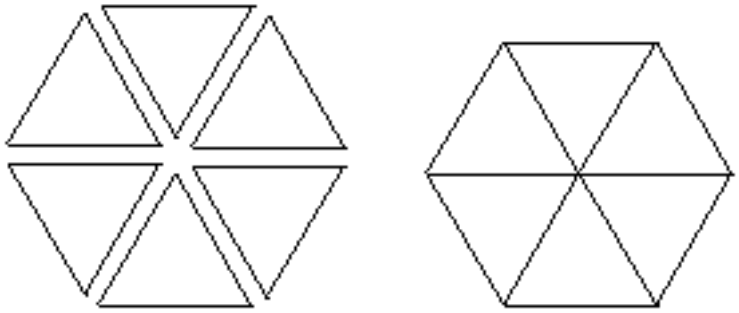
Actividad 2. El triángulo equilátero

Un triángulo equilátero tiene tres lados iguales y tres ángulos iguales.



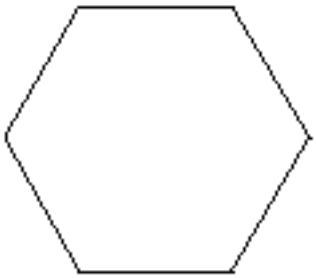
Triángulos equiláteros

De manera semejante podemos acomodar seis triángulos equiláteros alrededor de un punto. *¿Cuál es el tamaño de los ángulos de un triángulo equilátero?* Justifique su respuesta.

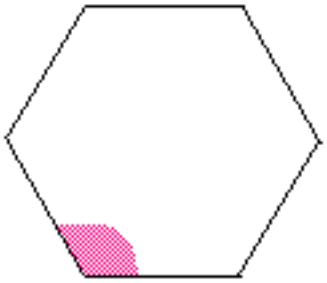


Actividad 3. El hexágono regular

Un hexágono regular tiene seis lados iguales y seis ángulos iguales.



Hexágono regular.



Un ángulo del hexágono

¿Cuántos hexágonos se pueden acomodar alrededor de un punto?
¿Cuál es la medida de los ángulos de un hexágono regular?
Justifique su respuesta.

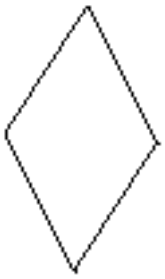
Relación con el triángulo equilátero

Describa cómo puede utilizar dos triángulos equiláteros para determinar el tamaño de los ángulos de un hexágono regular de otra manera.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividad 4. Dos Rombos

Determine el tamaño de los ángulos del rombo azúl y del rombo amarillento. Proporcione evidencia convincente que vaya más allá de la simple percepción ("se ve como..."). Puede sobreponer ángulos para hacer comparaciones, o puede encontrar otras maneras de convencerse y convencer a otros.



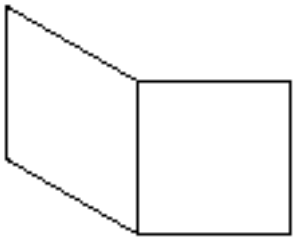
Rombo azúl

Rombo amarillento

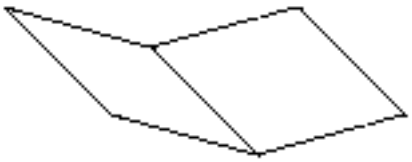
Actividad 5. Poniendo otras piezas juntas

Describa qué ángulo se forma al poner juntos,

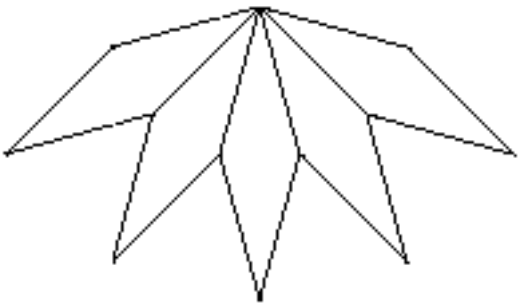
a) un cuadrado y un rombo azúl



b) un rombo azúl y un rombo amarillento



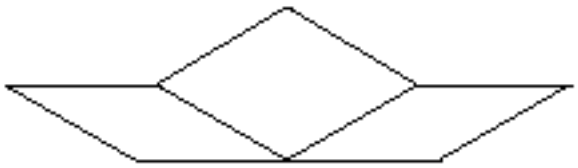
c) cinco rombos amarillentos



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

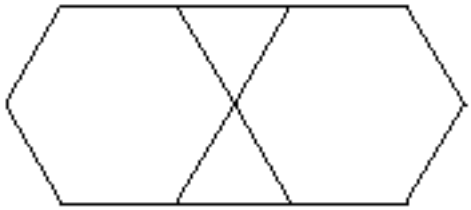
Los ángulos de los bloques de patrones

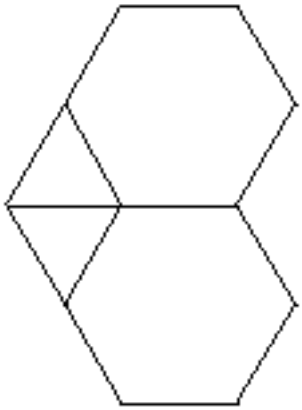
Muestre que puede obtener un ángulo de 180° poniendo dos rombos amarillentos a los lados de un rombo azúl.



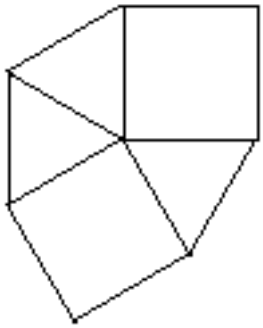
Actividad 6. Comprobando la sumas de ángulos

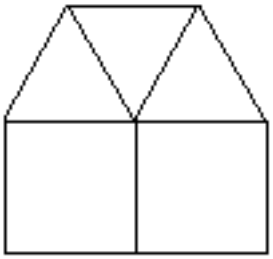
Dé un argumento convincente (más allá de la simple percepción) de que se puede formar un ángulo de 360° con dos hexágonos regulares y dos triángulos equiláteros.





Dé un argumento convincente que puede formar un ángulo de 360° con tres triángulos equiláteros y dos cuadrados.



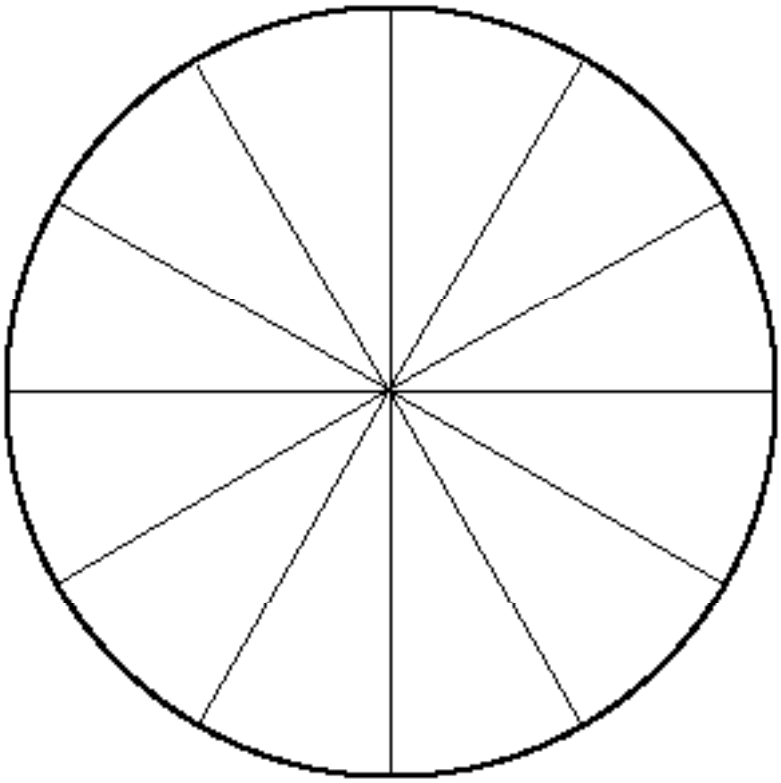


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Midiendo ángulos con cuñas de 30º

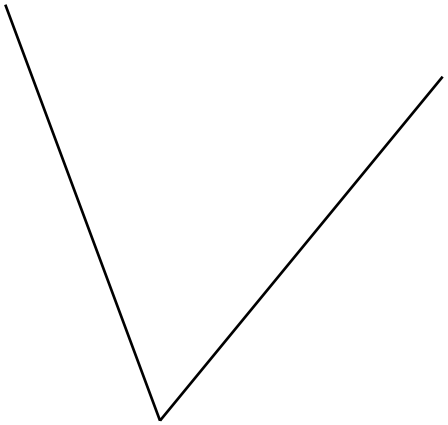
Cuñas de 30°

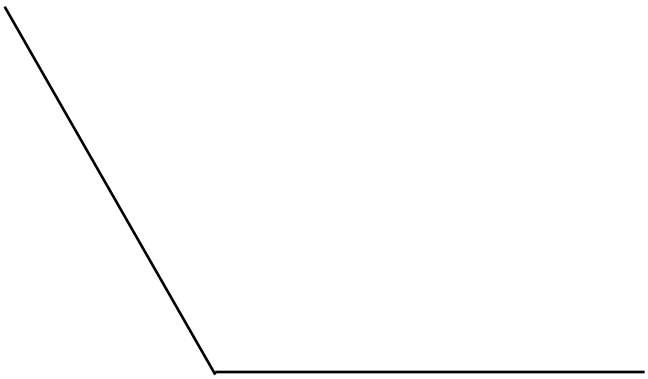
Los ángulos se pueden medir usando cuñas de 30°. Puede construir su propio juego de cuñas si pega una copia del círculo en cartulina y corta las cuñas.



Cuñas de 30°

Determine el tamaño de los siguientes ángulos utilizando las cuñas de 30°. Acomode las cuñas dentro de los ángulos de modo que las cuñas tengan los vértices juntos y estén una junto a la otra sin traslaparse, y sin que quede hueco entre ellas.

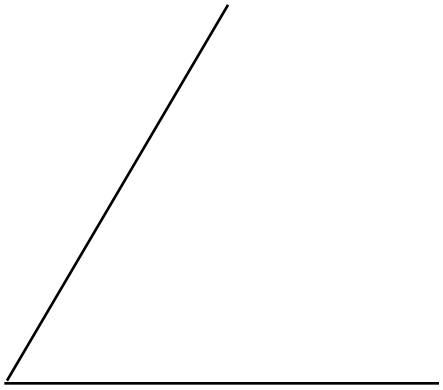




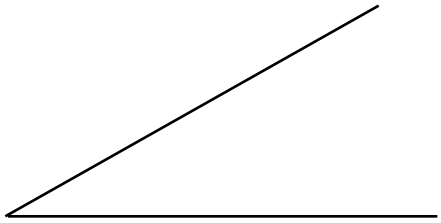
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Midiendo ángulos con cuñas de 30º

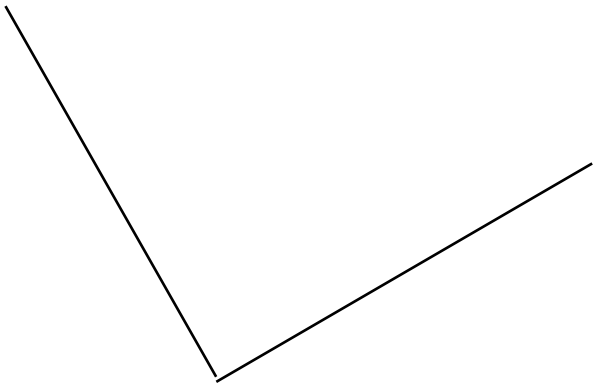
1.



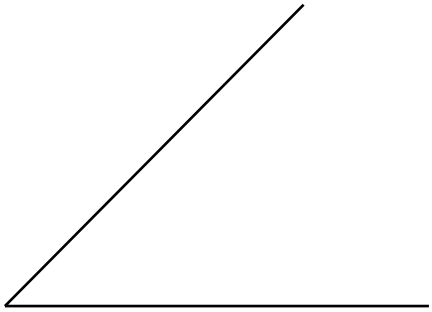
2.



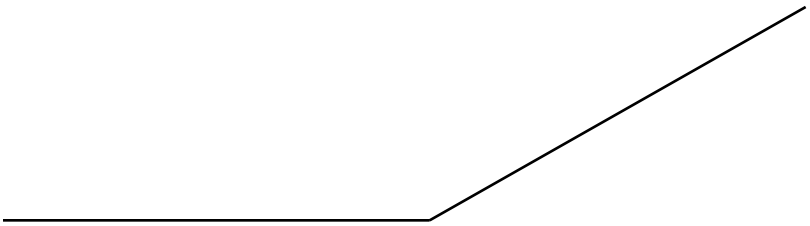
3.



4.



5.



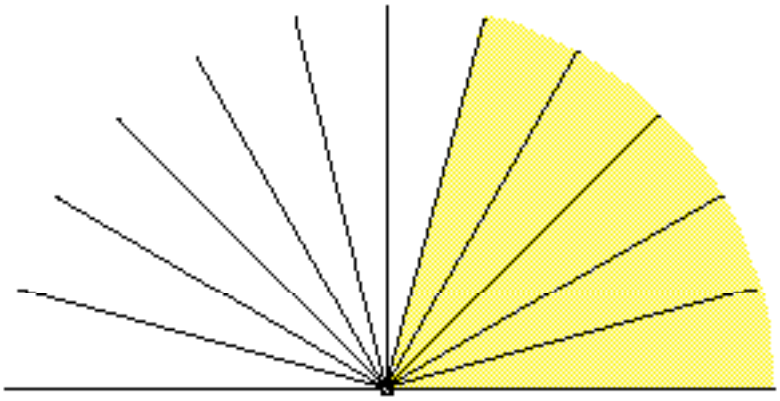
6.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

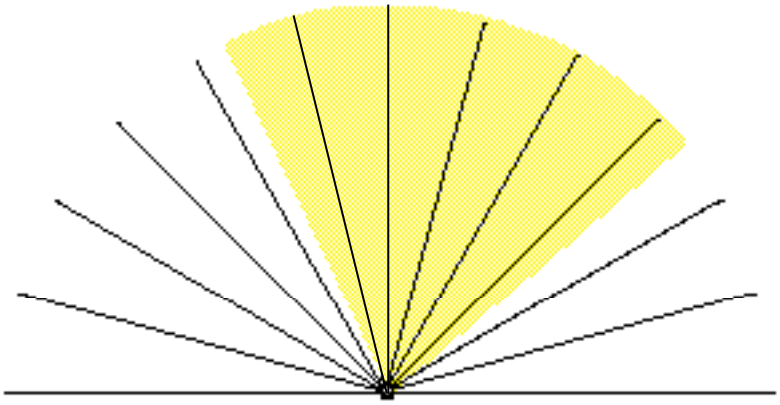
Un transportador con subdivisiones de 15º

Un transportador con subdivisiones de 15°

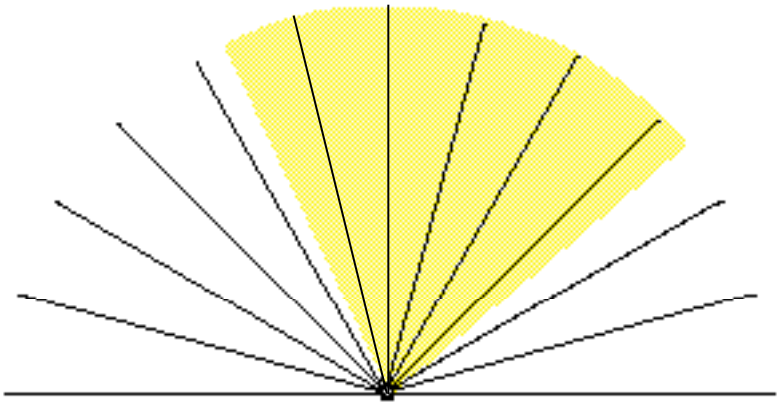
Para medir ángulos es importante que el transportador se coloque de modo que el punto central quede en el vértice del ángulo que se quiere medir, y que una de las líneas de la base del transportador coincida con uno de los lados del ángulo.



Posición correcta para medir un ángulo de 75°.



Incorrecto: La base del transportador no coincide con uno de los lados del ángulo.

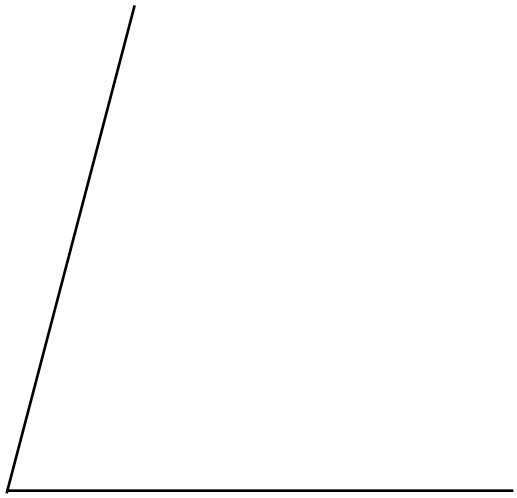


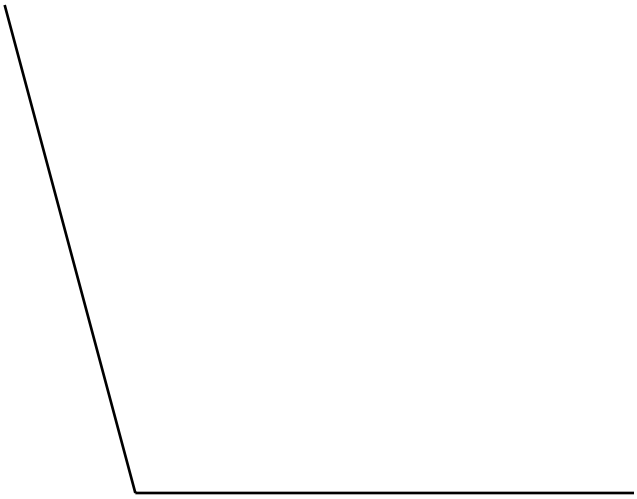
Incorrecto: El centro del transportador no está en el vértice del ángulo

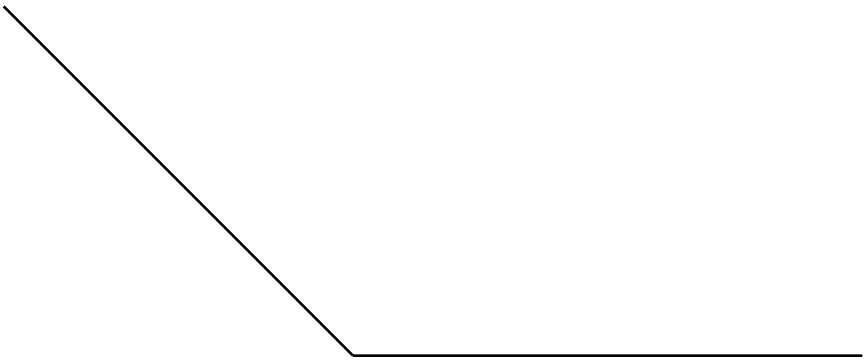
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un transportador con subdivisiones de 15°

Use el transportador con subdivisiones de 15° para medir los ángulos dados en la actividad anterior y para medir los ángulos dados abajo.





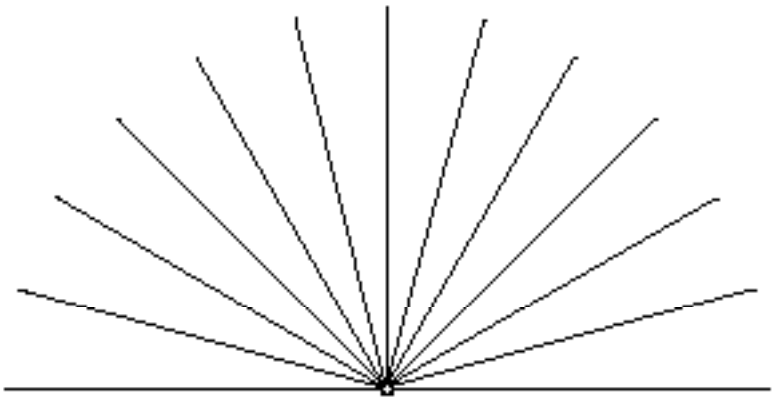


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un transportador con subdivisiones de 15º

Un transportador simple

Puede hacer su propio transportador con divisiones de 15° copiando el transportador a una transparencia.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Ángulos de referencia

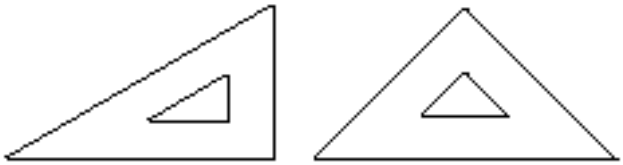
De la misma manera como desarrollamos un sentido para las distancias y longitudes usando valores particulares como referencia, podemos desarrollar un sentido para el tamaño de los ángulos usando valores particulares como referencia. Algunos ángulos que son útiles como referencias son 90°, 60°, 45°, y 30°. Combinando estos ángulos, podemos también encontrar ángulos que sirvan de referencia para ángulos mayores que 90°. Referencias útiles son los ángulos de 120°, 135°, 150°, y desde luego 180°

Actividad 1

Describa los siguientes ángulos de referencia utilizando sus propias palabras: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°. Por ejemplo, 45° es la mitad de un ángulo recto; 60° es el ángulo de un triángulo equilátero; 120° es el ángulo de un hexágono regular

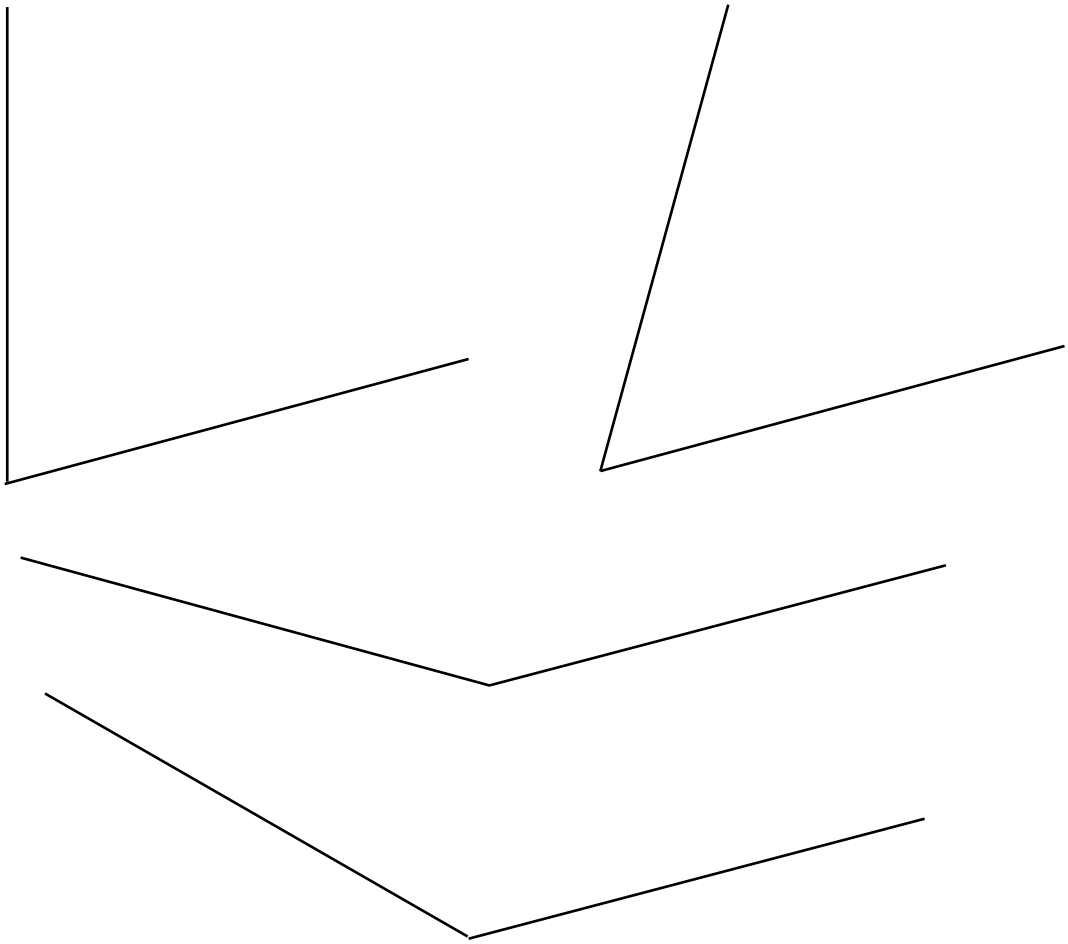
Las escuadras

Las escuadras son útiles para desarrollar el sentido para los ángulos utilizando como referencias ángulos de 30°, 45°, 60° y 90°. Identifique los tamaños de los diferentes ángulos en las escuadras.



Actividad 2

Use las escuadras para medir el tamaño de los siguientes ángulos.



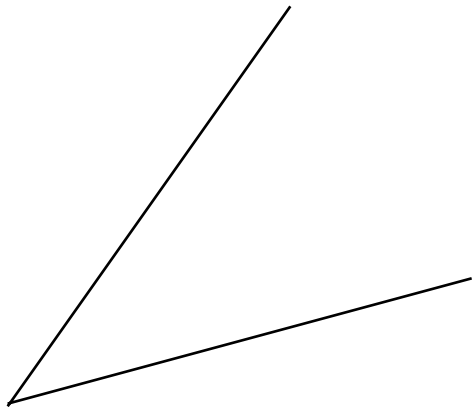
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Ángulos de referencia

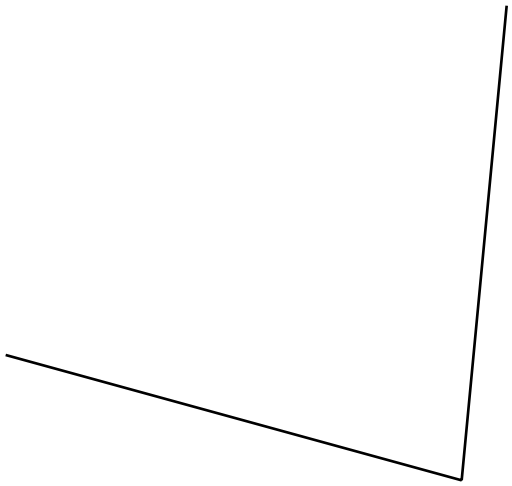
Actividad 3

Use las escuadras para estimar el tamaño de los siguientes ángulos. Describa el tamaño de los ángulos usando los ángulos de referencia como comparación. Por ejemplo, el primer ángulo es un poco mayor que 30° pero menor que 45°.

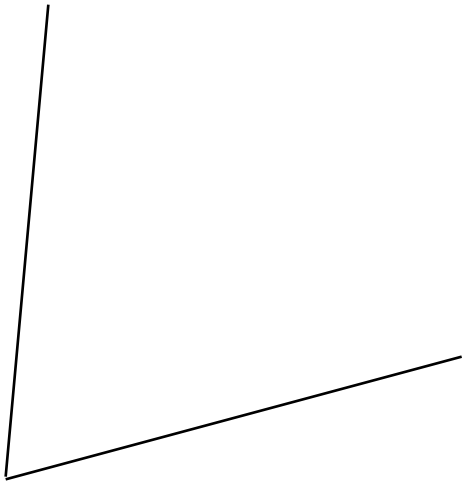
1.



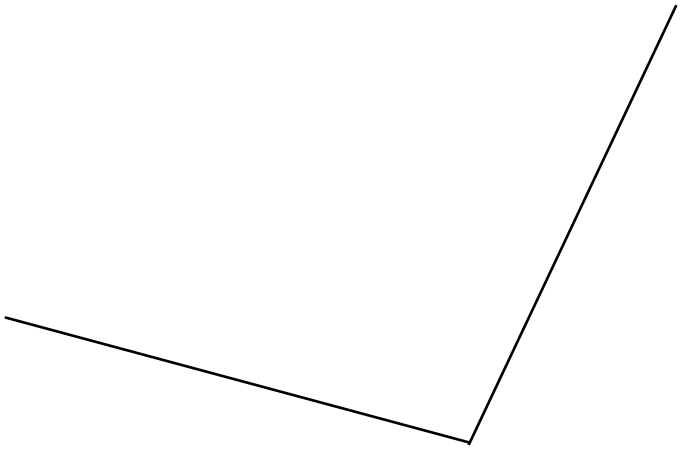
2.



3.



4.



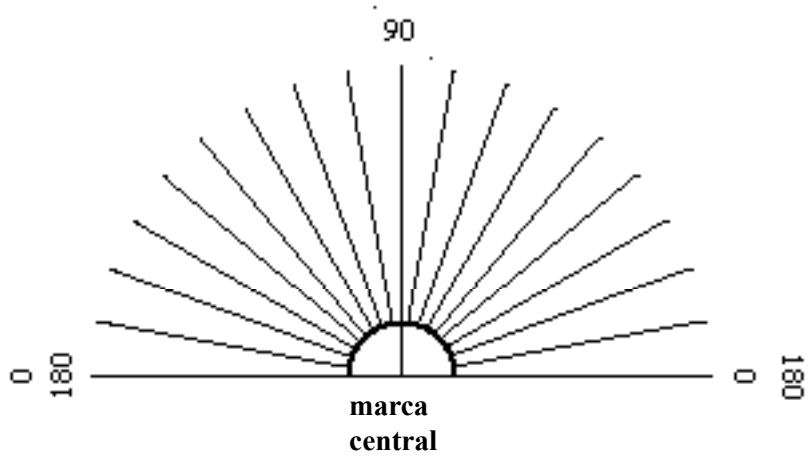
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Medición de los ángulos con un transportador

Después de medir ángulos con cuñas, y con transportadores sencillos (como el transportador con divisiones de 15°) los participantes pueden entender mejor cómo usar el transportador estándar. Este instrumento para medir ángulos resulta difícil por varias razones. La unidad de medida, 1°, es demasiado pequeña, de modo que no tenemos un sentido intuitivo de qué tan grande es 1°. Como 1° es tan pequeño, las subdivisiones en el transportador están muy juntas. Y aún cuando las marcas estén numeradas sólo cada 10°, el transportador tiene muchas marcas y números. Además hay dos escalas indicadas, una que va de derecha a izquierda y una que va de izquierda a derecha. Algunos transportadores no tienen líneas que conecten los extremos de los ángulos con el vértice, de modo que algunos participantes encuentran difícil entender qué es lo que están midiendo.

Actividad 1. Tres marcas importantes del transportador

Encuentre las marcas correspondientes a 0° y 180° en ambos lados del transportador. Debe haber una línea en el transportador que une las marcas en lados opuestos del transportador. Encuentre la marca del punto medio de este segmento (ésta la llamaremos la marca central).



Para medir un ángulo, la marca central del transportador debe estar en el vértice del ángulo. Un lado del ángulo debe pasar por la marca de 0° de uno de los lados del transportador. Busque el número del transportador que esté más cerca del otro lado del ángulo. Este número indica la medida del ángulo.

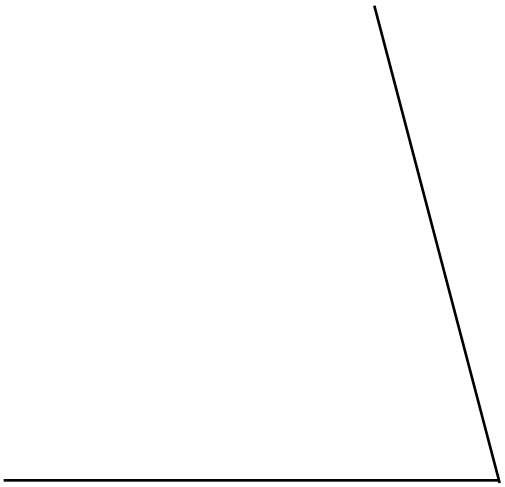
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Medición de los ángulos con un transportador

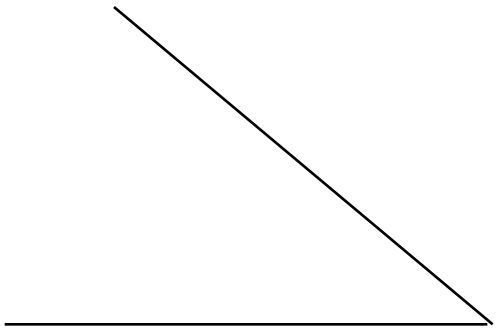
Actividad 2. Medición de ángulos con las escalas que va de izquierda a derecha
Para los siguientes ángulos, es más fácil medirlos si hacemos coincidir la marca de 0° del lado izquierdo del transportador con el lado horizontal del ángulo. Nota la escala que va de 0° en la izquierda a 90° en la parte de arriba y que continua a 180° a la derecha. Si está midiendo un ángulo menor que un ángulo recto, la medida debe ser menor que 90° (los ángulos que miden menos que un ángulo recto se llaman ángulos agudos). Si está midiendo un ángulo mayor que un ángulo recto, entonces debe obtener una medición mayor que 90° (estos ángulos se llaman ángulos obtusos).

1.

2.



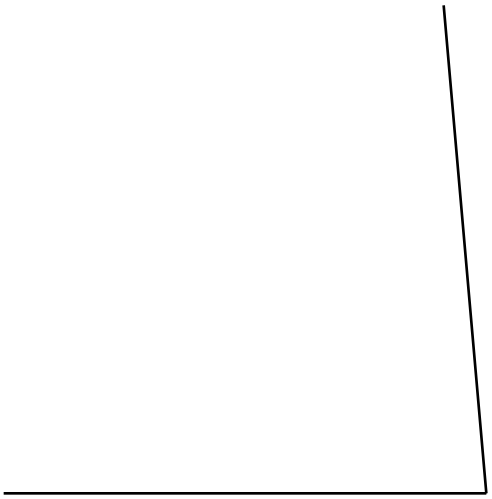
3.



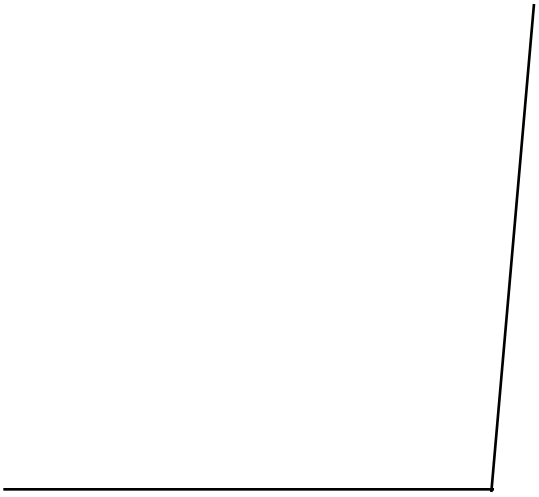
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividad 2. Medición de ángulos con las escala que va de izquierda a derecha (continuado)

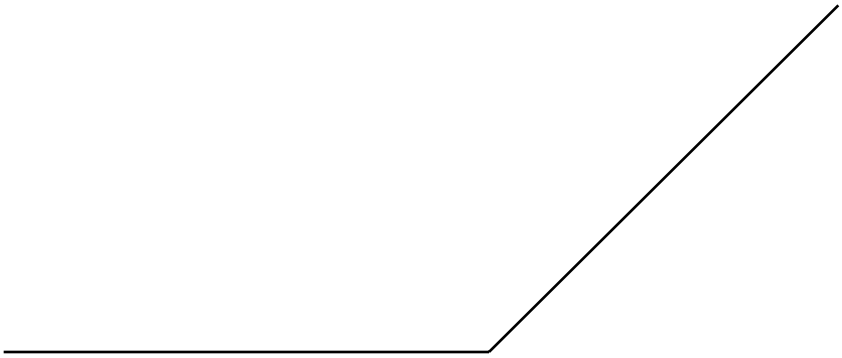
4.



5.



6.

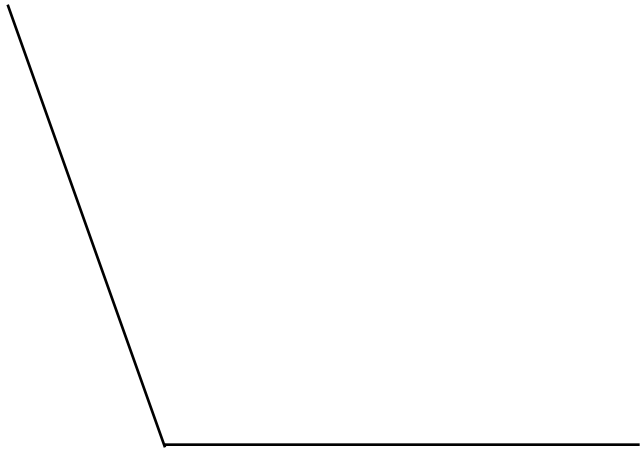


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

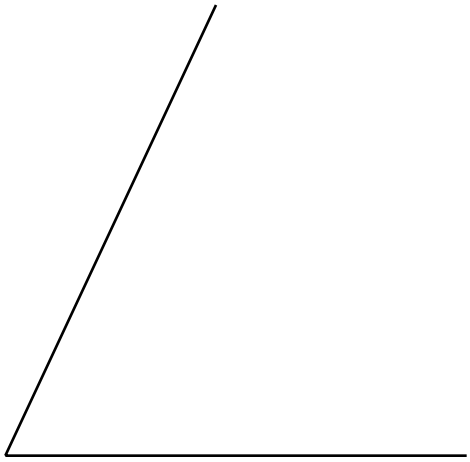
Medición de los ángulos con un transportador

Actividad 3. Medición de ángulos con las escalas que va de izquierda a derecha
Los siguientes ángulos son más fáciles de medir si hacemos coincidir la marca de 0° de la derecha del transportador con el lado horizontal del ángulo. Nota la escala que va de 0° en la derecha a 90° en la parte de arriba y continua a 180° en la izquierda. Si está midiendo un ángulo menor que un ángulo recto, la medida debe ser menor que 90°. Si está midiendo un ángulo mayor que un ángulo recto, la medida debe ser mayor que 90°.

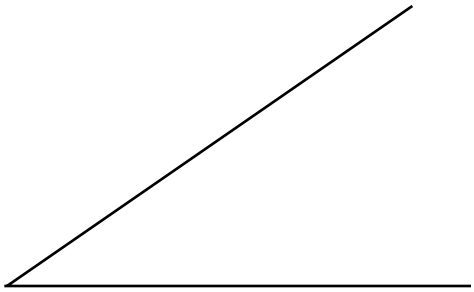
1.



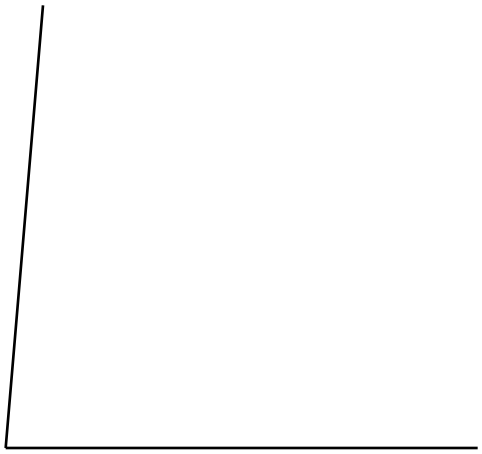
2.



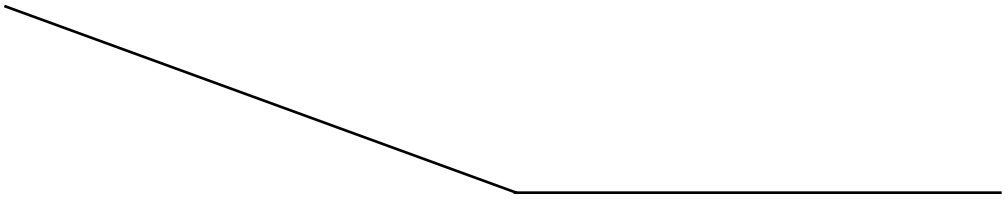
3.



4.



5.



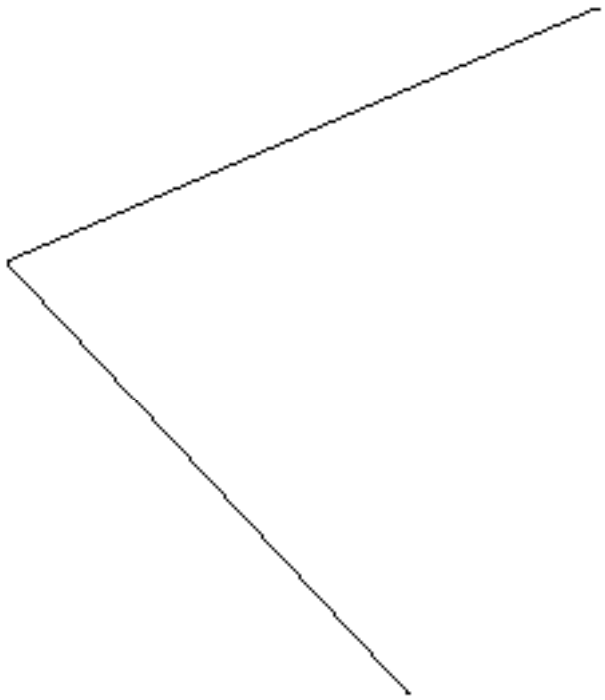
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Medición de los ángulos con un transportador

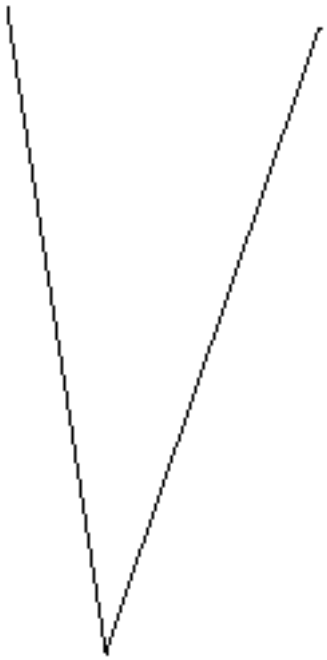
Actividad 4. Decidir cuál escala usar

En muchos casos tendrá que decidir cuál de las dos escalas hace que sea más fácil medir el ángulo. Mueva el transportador de modo que su base coincida con uno de los lados del ángulo y que la marca central del transportador quede en el vértice del ángulo.

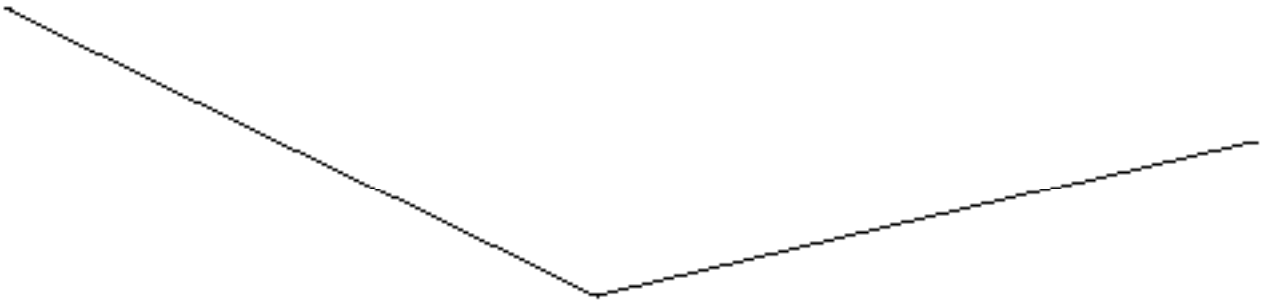
1.



2.



3.



4.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Suma de los ángulos de un triángulo

En estas actividades vamos a explorar la suma de los ángulos de un triángulo.

Actividad 1. Razgar y juntar

1. Señale cada uno de los ángulos del triángulo de papel con un letra distinta o utilizando diferentes colores o con otras marcas. Rasgue el triángulo a mano (sin usar las tijeras) en tres partes de modo que cada una de ellas contenga uno de los ángulos.

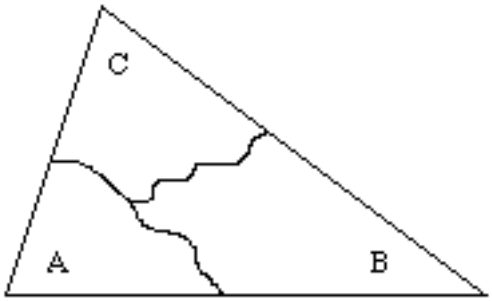


Figura 1. El triángulo es cortado en tres pedazos

2. Reacomode las tres partes haciendo coincidir los vértices en un punto.
   - *¿Qué es lo que observa?*
   - *Mira a su alrededor y observe lo que los otros participantes obtuvieron.*
   - *Podrá observar que los tres ángulos juntos forman una línea recta, como se muestra en la Figura 2.*

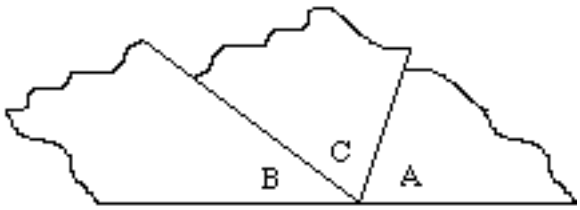


Figura 2. Los tres ángulos juntos

3. Recuerda que una línea recta puede ser formada también por dos ángulos rectos (de 90º) de modo que la medida angular de una línea recta es 180º. Este experimento muestra que la suma de los ángulos de su triángulo es 180°, y también para los triángulos de los otros participantes.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Suma de los ángulos de un triángulo

Actividad 2. Verificación por medición

También podemos medir los ángulos de un triángulo y obtener su suma.

1. Identifique los ángulos interiores de cada uno de los triángulos en la Figura 3.
2. Use el transportador para medir los ángulos interiores de cada triángulo.
3. Anote los resultados en la tabla.

	Medidas de los ángulos			Suma de las medidas
	A	B	C	A + B + C
1				
2				
3				
4				
5				
6				

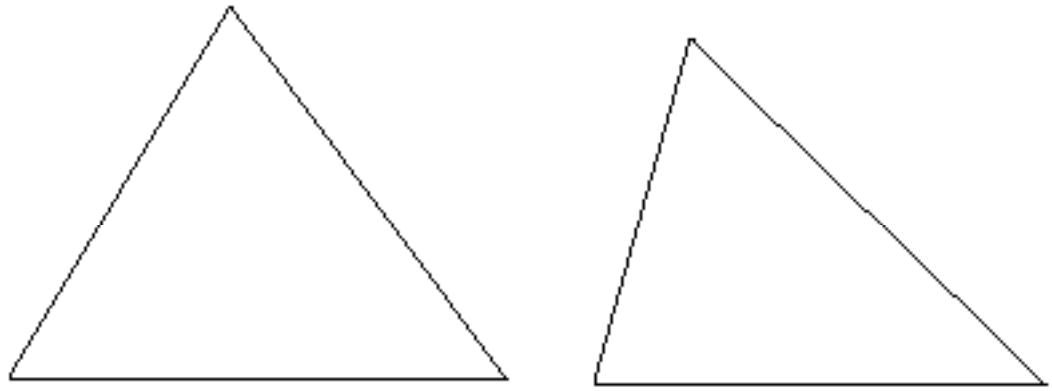
4. Observe la columna de las sumas de los ángulos.
   ¿La suma está cerca o es igual a qué valor?

Un objetivo de estas actividades es convencerse de una manera distinta que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. Otro objetivo es que vea que cuando medimos hay generalmente errores de medición, de modo que no siempre los valores suman exactamente 180°; la suma puede diferir en algunos grados.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Suma de los ángulos de un triángulo

1.



3.

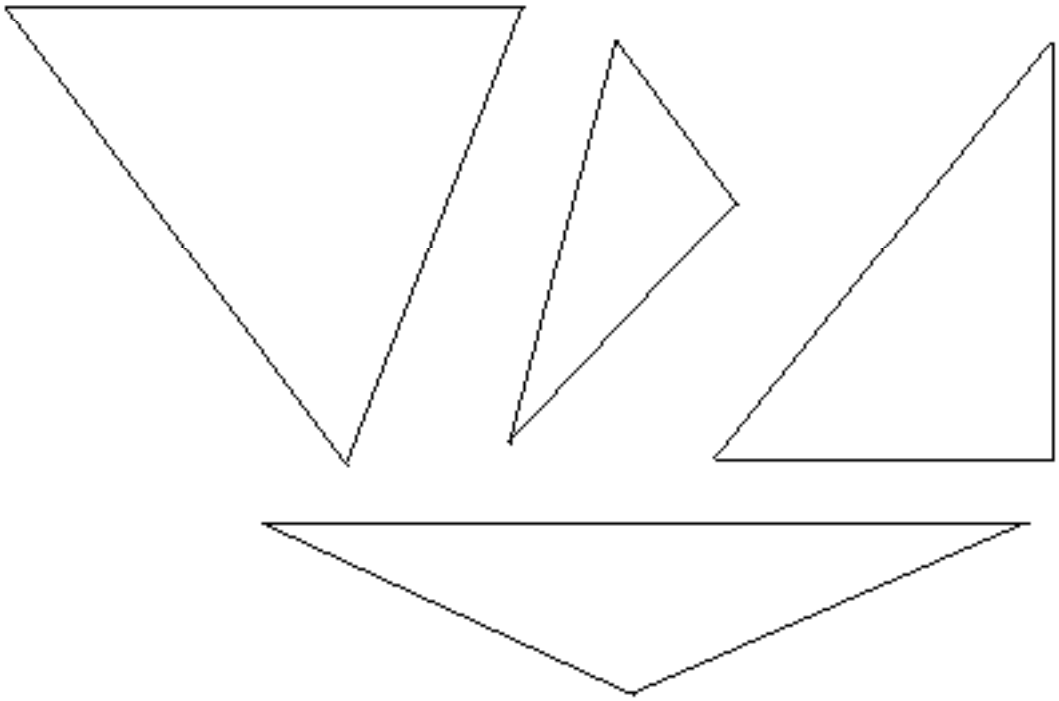


Figura 3. Triángulos

ulo más grande o más pequeño pero manteniendo

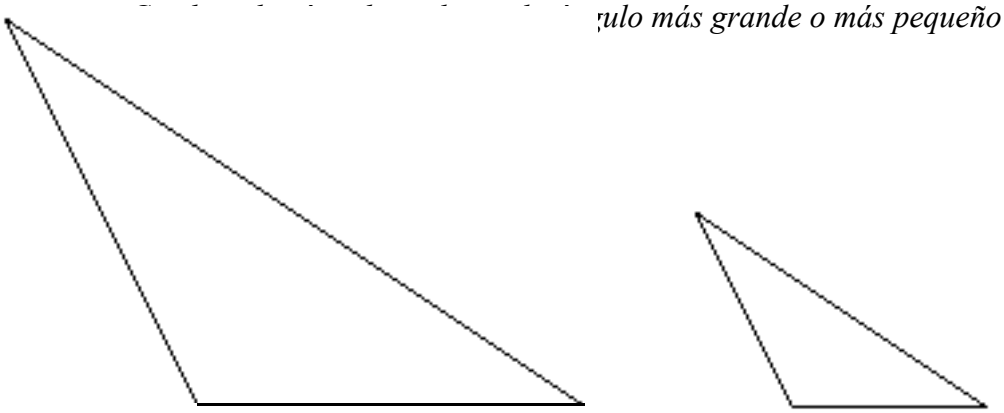


Figura 4. Ángulos en triángulos semejantes

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Suma de los ángulos de un triángulo

Actividad 3. Mosaicos triangulares

Ahora vamos a usar otro método con mosaicos triangulares para llegar al mismo resultado

1) Pegue una copia de los mosaicos triangulares que vienen al final de esta sección en cartulina y recorte los triángulos.

2) Observe que todos los triángulos son congruentes entre sí. Los lados correspondientes tienen la misma longitud, y los lados correspondientes son iguales. Observe también que los ángulos que son iguales están marcados con el mismo color.

3) Utilice los mosaicos triangulares para formar un camino recto. Aquí se muestra una forma.

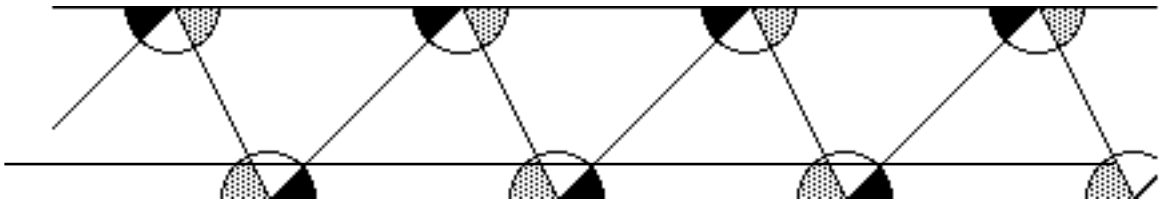


Figura 5. Un camino recto de triángulos congruentes.

4) Observe los ángulos que están juntos en uno de los lados del camino recto. Nota que tiene uno de cada color donde se juntan tres ángulos.

¿Cuál es la suma de estos tres ángulos?

5) Ahora mire uno de los triángulos. Puede notar que tiene ángulos que son iguales a los ángulos del mismo color que forman la línea recta.

¿Qué puede decir acerca de la suma de los ángulos en un triángulo comparado con la suma de los tres ángulos en uno de los lados del camino recto?

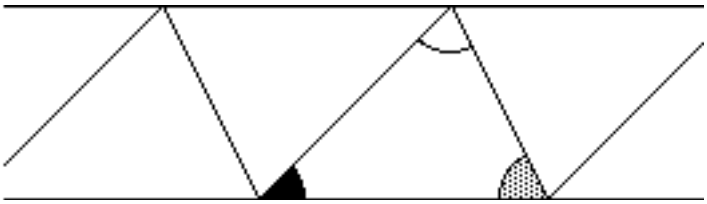


Figura 6. Tres ángulos.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Suma de los ángulos de un triángulo

Actividad 3. Mosaicos triangulares (continuado)

6) Use los mosaicos triangulares para formar un camino doble como se muestra

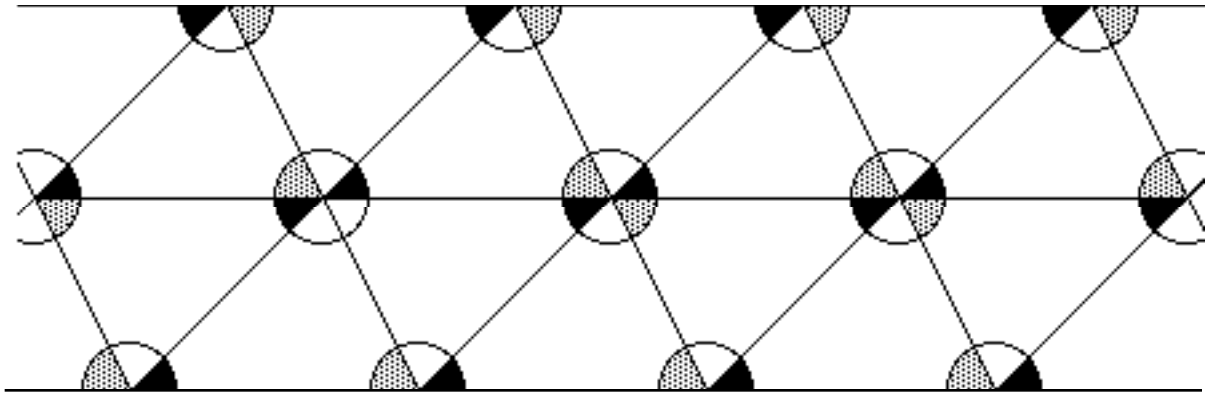


Figura 7. Un camino doble

7) Mire uno de los vértices en el centro del camino. Note que seis ángulos rodean un punto.
¿Cuál es la suma de los seis ángulos?

8) Describa el patrón de colores de los ángulos.
- *¿Cómo se relacionan con los ángulos de uno de los triángulos?*
- *¿Qué puede decir acerca de la suma de los ángulos en un triángulo?*
- *¿Qué puede decir acerca de los ángulos que son opuestos por el vértice?*

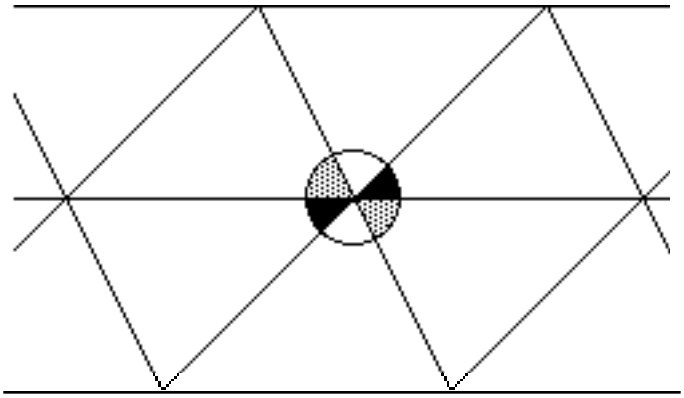
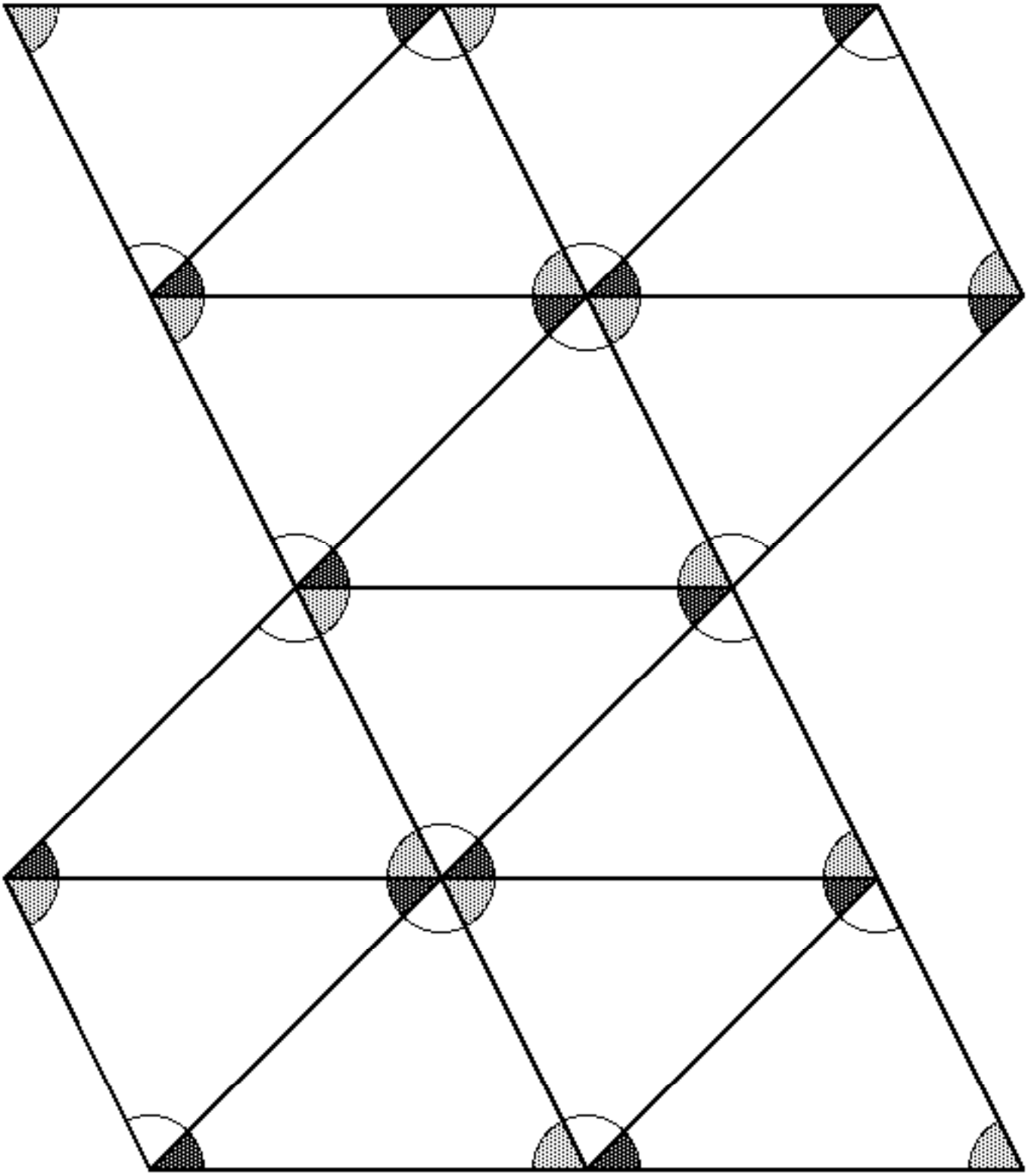


Figura 8. Seis ángulos alrededor de un vértice central.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Suma de los ángulos de un triángulo

Pegue en cartón o copiélo en cartulina y corte los triángulos.

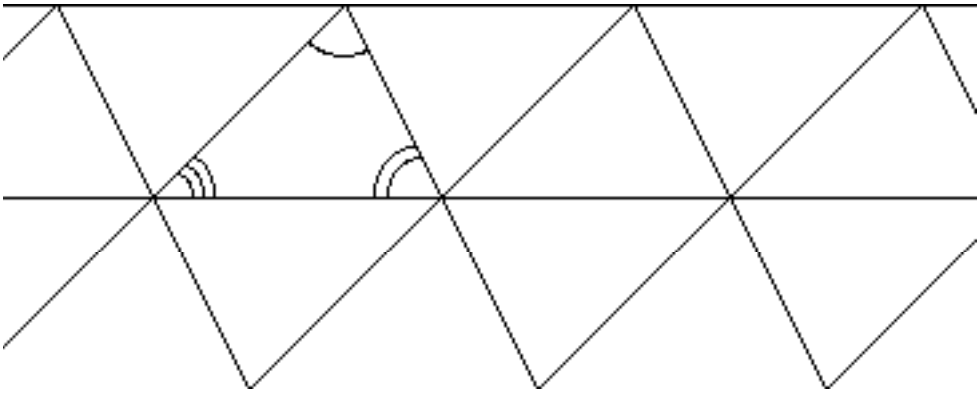


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividad adicional para la suma de los ángulos de un triángulo

Material suplementario para grupos que avanzan más rápido que otros grupos en la clase

Identifique los ángulos que son congruentes con cada uno de los ángulos marcados en el dibujo, pintándolos del mismo color.



Identificar ángulos iguales.

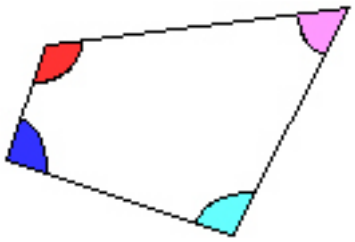
En los seis ángulos que rodean un vértice, observe los colores que corresponden a los ángulos del triángulo. Hay tres pares de colores, cada color corresponde a un ángulo interior del triángulo. Use este resultado para obtener de otra manera la suma de los ángulos de un triángulo.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

La suma de los ángulos en un cuadrilátero

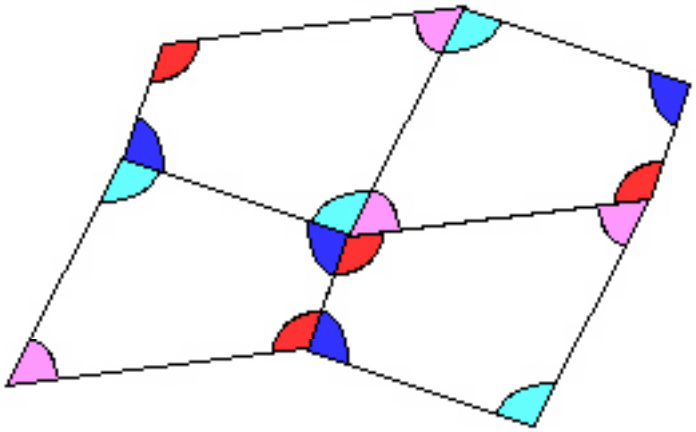
Actividad 1

En esta actividad vamos a estudiar las suma de los ángulos en un cuadrilátero arbitrario. Tiene un conjunto de cuatro copias congruentes de un cuadrilátero arbitrario, esto es, no es especial en alguna forma. Marque los ángulos en uno de los cuadriláteros con diferentes colores.



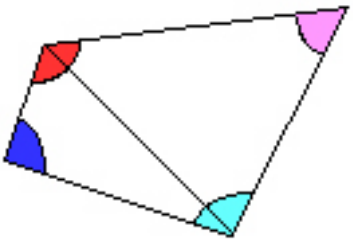
Identifique los ángulos en los otros cuadriláteros que sean congruentes con cada uno de los ángulos coloreados. Marque ángulos congruentes con el mismo color.

Una manera de encontrar la suma de los ángulos en un cuadrilátero arbitrario es poner cuatro copias del cuadrilátero alrededor de de un vértice común, de modo que todos los colores estén presentes. Tal vez necesite rotar dos de los cuadriláteros.



Actividad 2

Otro método para encontrar la suma de los ángulos de un cuadrilátero es usar el hecho de que el cuadrilátero se puede descomponer en dos triángulos.



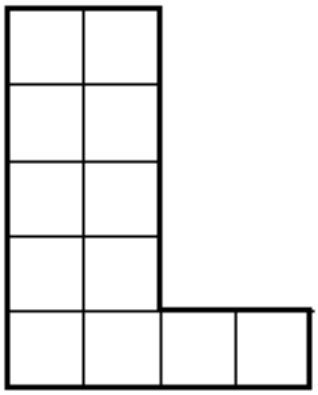
Use el hecho de que los ángulos de los dos triángulos juntos forman los ángulos del cuadrilátero, y que la suma de los ángulos en cada uno de los triángulos es 180° para encontrar la suma de los ángulos en el cuadrilátero.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

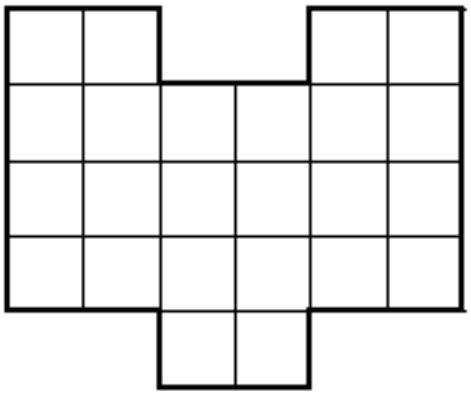
Área y perímetro

Actividad inicial

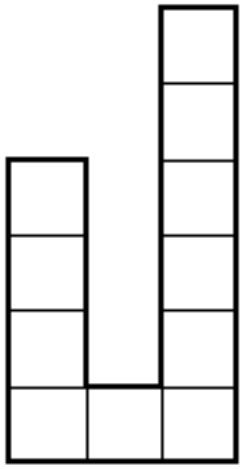
1) Encuentre el área y el perímetro de las siguientes figuras (la cuadrícula utilizada es de cm^2).
2) Explique qué fue lo que hizo para encontrar el área de cada una de las figuras.
3) Explique con sus propias palabras lo que significa área y lo que significa perímetro.
4) Dé ejemplos de cuándo se usa el área, y de cuándo se usa el perímetro.



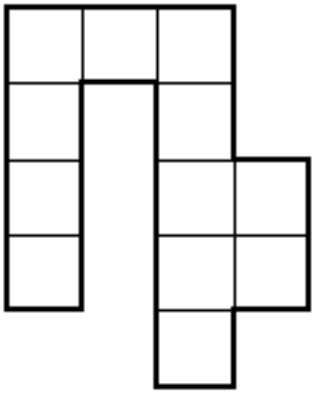
A =
P =



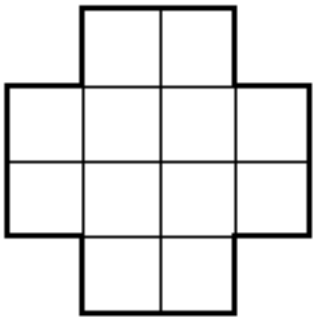
A =
P =



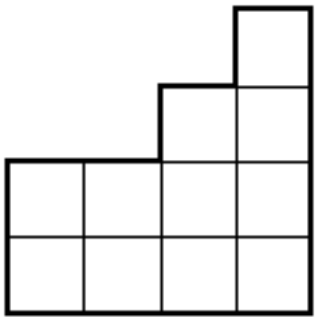
A =
P =



A =
P =



A =
P =

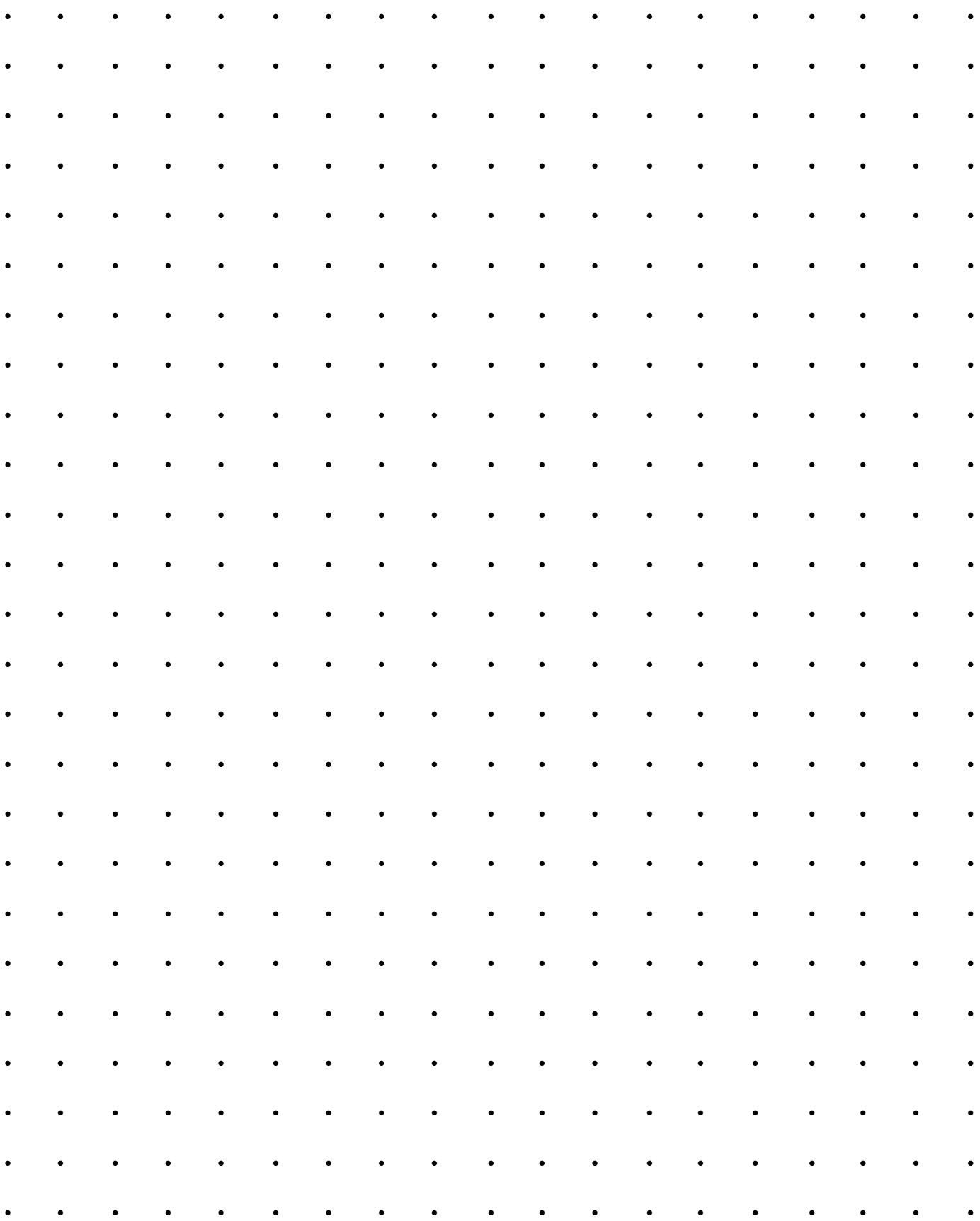


A =
P =

5) En su grupo pequeño, hablen de qué es el área y dé una definición.
6) Hable y defina el perímetro.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Papel gráfico de un centímetro



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Área en el geoplano

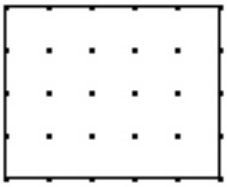
El geoplano es una tablilla con estaquillas que forman una retícula cuadrada. Se pueden comprar por aproximadamente $6. Se puede formar fácilmente figuras geométricas en el geoplano utilizando ligas. Para estas actividades el cuadrado entre cuatro estaquillas contiguas de la geotablilla es una unidad de área. También se puede utilizar papel cuadriculado y una regla.

Actividad 1

Construye un cuadrado unitario en la geotablilla. Construye un rectángulo que contenga el cuadrado unitario. *¿Cuántos cuadrados unitarios caben en su rectángulo?*

Actividad 2

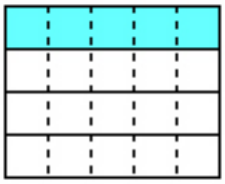
1) Construye un rectángulo en la geotablilla que tenga una base de cinco unidades y una altura de cuatro unidades.



Cuenta el número de cuadrados unitarios contenidos en el rectángulo.

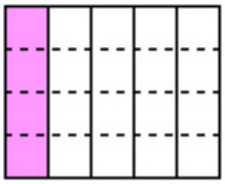
2) Use ligas para dividir el rectángulo en renglones.
   - *¿Cuántos renglones hay?*
   - *¿Cuántos cuadrados unitarios en cada renglón?*
   - *¿Cómo puedes usar esto para encontrar el número total de cuadrados unitarios en el rectángulo?*

Nota que el número de cuadrados por renglón está dado por la longitud de la base del rectángulo, y que el número de renglones está dado por la altura del rectángulo. Relaciona esto con la fórmula base por altura que se usa para calcular el área de un rectángulo.



3) Divide el rectángulo de cinco por cuatro en columnas.
   - *¿Cuántas columnas hay?*
   - *¿Cuántos cuadrados en cada columna?*
   - *Describa una manera alternativa para encontrar el número total de cuadros en el rectángulo.*

Note que el número de columnas está dado por la longitud de la base, y el número de cuadrados en cada columna está dado por la altura del rectángulo.

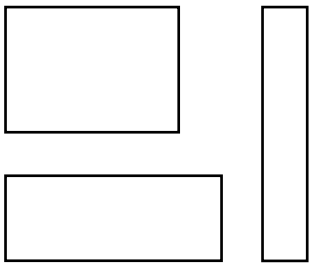


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Área en el geoplano

4) Explique con sus propias palabras cómo los métodos en 2 y en 3 se relacionan con la fórmula usual para calcular el área de un rectángulo, Área = base × altura.

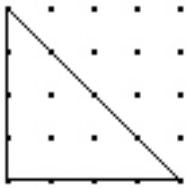
Construya un rectángulo diferente. Encuentre el número total de cuadrados unitarios contándolos, usando renglones, usando columnas, y usando la fórmula base por altura.



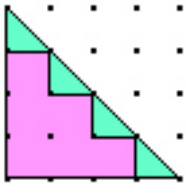
Actividad 3. El área de un triángulo retángulo.

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto (90°). Construya un triángulo rectángulo en la geotablilla de modo que el triángulo tenga la base paralela a la orilla, con una base de cuatro unidades y una altura de cuatro unidades.

1) Encuentra el área del triángulo contando el número de cuadrados unitarios dentro.



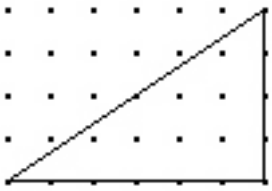
Esta es una forma de contar los cuadrados.



Construye un triángulo rectángulo con una base de cinco unidades y una altura de cinco unidades. Verifica que hay 10 cuadrados completos, y cinco medios cuadrados, para un área total de 12-1/2 cuadrados unitarios.

En el caso de otros triángulos, no siempre es tan fácil contar partes de cuadrados. Vamos a utilizar un método diferente para encontrar el área de un triángulo rectángulo.

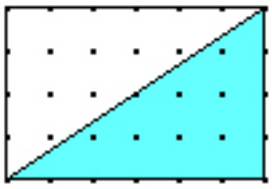
2) Construya un triángulo rectángulo con una base de seis unidades y una altura de cuatro unidades.



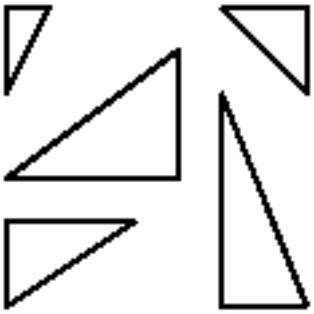
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Área en el geoplano

3) Muestre que el triángulo rectángulo es la mitad de un rectángulo. *¿Cuál es el área total del rectángulo?* Use este hecho para encontrar el área del triángulo. Note que la base del triángulo es igual a la base del rectángulo, y que la altura del triángulo es igual a la altura del rectángulo. Si **b** es la base del triángulo, y **h** es su altura, puedes convencerte de que podemos escribir la fórmula para el área de un triángulo rectángulo como $\frac{b\,x\,h}{2}$.



Construya un triángulo rectángulo diferente. Encuentra el número total de cuadrados mostrando que el triángulo es la mitad de un rectángulo con la misma base y la misma altura.



Actividad 4. Area de otros triángulos

Construya un triángulo que tenga sólo un lado paralelo a la orilla de la geotablilla, de modo que los ángulos en la base del triángulo sean agudos.

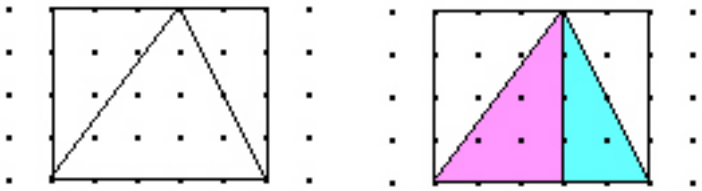
1) Encuentre el área del triángulo

2) Un método para calcular el área del triángulo es formar dos triángulos rectángulos. Ya sabemos cómo calcular el área de un triángulo rectángulo, ($\frac{b\,x\,h}{2}$). *¿Cómo podemos usar esto?*

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

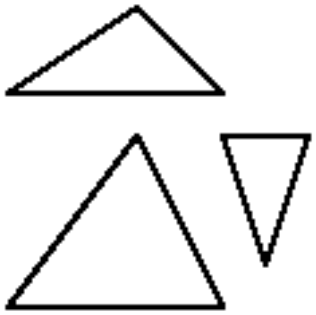
Área en el geoplano

3) La siguiente figura ilustra otro método. Forma un rectángulo alrededor del triángulo que tenga la misma base y la misma altura. Use este método para encontrar el área del triángulo.



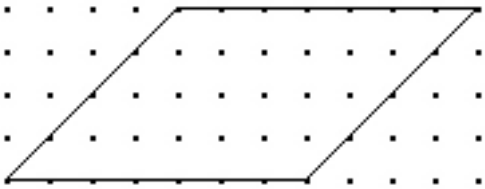
En todos los casos que hemos visto aquí, el área del triángulo puede ser calculada como base por altura entre dos, la misma fórmula que para el triángulo rectángulo. Así que para los triángulos que hemos estudiado hasta ahora podemos decir que Área = base × altura / 2. Veremos más adelante que de hecho esta fórmula se puede utilizar con cualquier triángulo.

Ejercicio. Construya un triángulo diferente. Encuentre el área mostrando que el triángulo es la mitad de un rectángulo con la misma base y la misma altura.



Actividad 5. El área del paralelogramo

1) Construya un paralelograma que tenga una base paralela al borde de la geotablilla.



Encuentre el área del paralelogramo.

2) Construya su propio paralelogramo. Encuentre un rectángulo que tenga la misma base y la misma área que el paralelogramo.

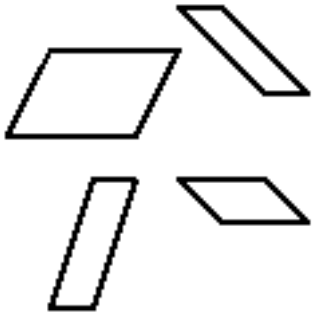
- *¿Cómo es la altura del paralelogramo comparada con la altura del rectángulo?*

Intente encontrar el área del paralelograma solo, pero si no puede, mire las pistas y soluciones al final de esta actividad.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

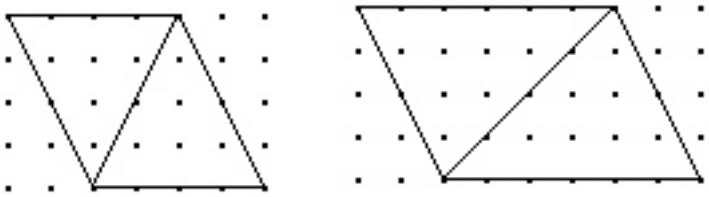
Area en el Geobtablilla

Explique con sus propias palabras por qué la fórmula del área del paralelogramo es Área = base × altura.



3) Construya un paralelogramo diferente. Encuentre un rectángulo que tenga la misma base y la misma área que el paralelogramo.

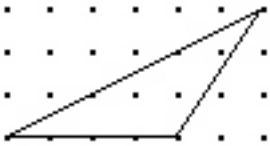
Una forma alternativa de encontrar el área de un paralelogramo.
Construya un paralelogramo. Divida el paralelogramo en dos triángulos congruentes construyendo una de sus diagonales. Sea b la base del paralelogramo y h su altura.



El área de cada triángulo es *1/2 x b x h. ¿Cuál es el área del paralelogramo?*

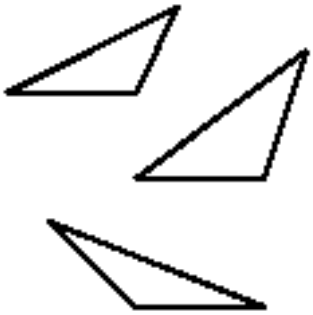
Actividad 6: El área del triángulo

Una forma de triángulo para la cual algunos alumnos encuentran más difícil encontrar su área, es cuando el ángulo en la base es obtuso (mayor que 90°). Aquí tenemos un triángulo con una base de 4, y altura de 3, con un ángulo obtuso en la base. Encuentra el área de este triángulo.



1) Encuentre el área de este triángulo. Intente encontrar el área del triángulo solo, pero si no puede, mire las pistas y soluciones al final de esta actividad..

2) Encuentre el área de uno de los triángulos siguientes en, por lo menos, dos maneras diferentes..

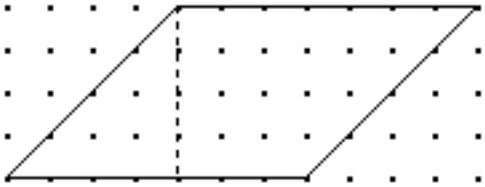


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

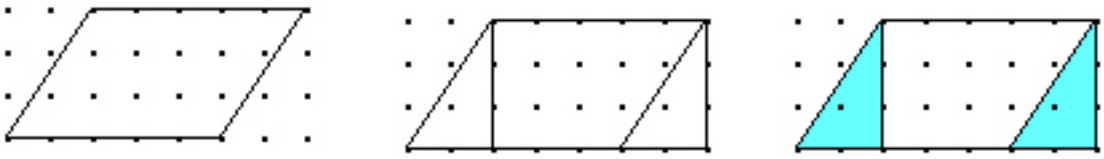
Sugerencias y soluciones

Sugerencias y soluciones para la Actividad 5: El área del paralelogramo

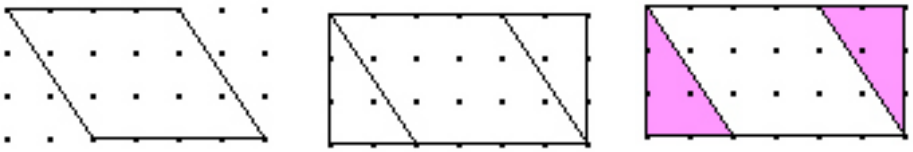
Esta es una sugerencia de un método que podrías usar. Construye una línea perpendicular a la base para formar un triángulo en uno de los lados del paralelogramo.

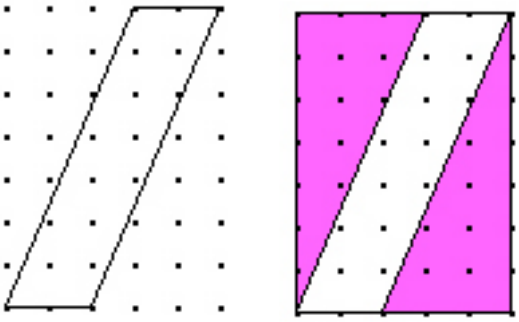


Una posible solución



Un método alternativo para calcular el área de un paralelogramo es formar un rectángulo que encierre el paralelogramo, calcular el área de todo el rectángulo y sustraer las áreas de los dos triángulos sombreados.



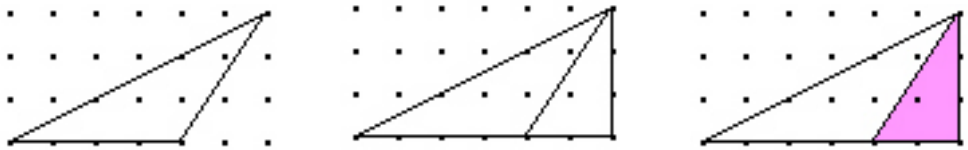


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

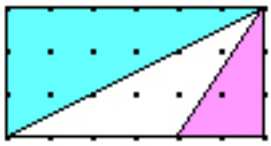
Sugerencias y soluciones

Sugerencias y soluciones para la Actividad 6: El área del triángulo

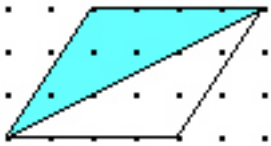
Una manera de encontrar el área es construir un triángulo rectángulo a un lado, de modo que el triángulo original más este triángulo pequeño formen un triángulo rectángulo. El área del triángulo original será la diferencia de las áreas de los dos triángulos rectángulos.



Un segundo método para calcular el área de un triángulo obtuso es formar un rectángulo alrededor del triángulo, calcular el área del rectángulo y restar las áreas del triángulo turquesa y del triángulo morado.



Un tercer método es usar el hecho que un triángulo es la mitad de un paralelogramo con la misma base y la misma altura. El área del paralelogramo es 4 x 3, el área del triángulo debe ser entonces 1/2 x 4 x 3.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un rompecabezas para el área de un paralelogramo

Materiales suplementarios para grupos que avanzan más aprisa que otros grupos en la clase.

Pegue las siguientes piezas en cartón y recórtalas.

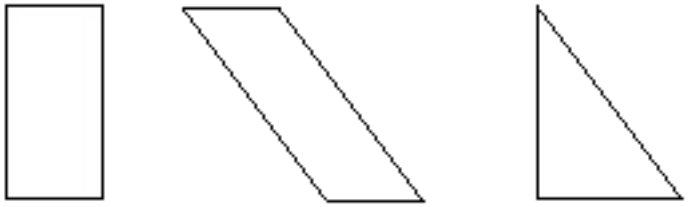


Figura 1

Con el paralelogramo y el triángulo forma el siguiente rompecabezas.

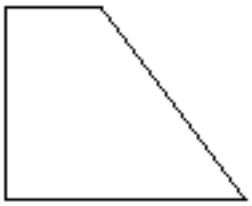


Figura 2

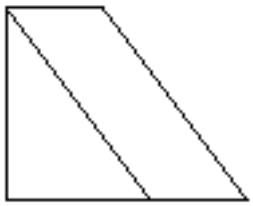


Figura 3

Ahora use el rectángulo y el triángulo para forma el rompecabezas.

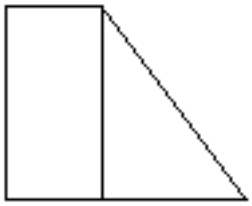


Figura 4

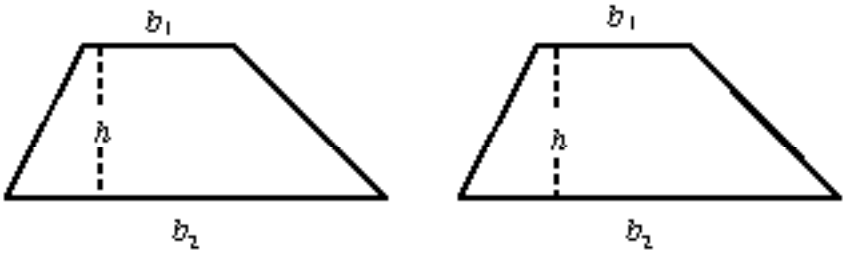
¿Qué puede decir acerca del área del paralelogramo y el área del rectángulo?

- La base menor del paralelogramo es igual a la base menor del rectángulo. Puede verificar esto sobreponiendo las dos bases o comparando la Figura 3 con la Figura 4.
- La altura del paralelogramo es igual a la altura del rectángulo. Lo puede ver al comparar las figuras 3 y 4.
- ¿Qué puede concluir acerca del área de un paralelogramo con respecto al área de un rectángulo con la misma base y la misma altura?

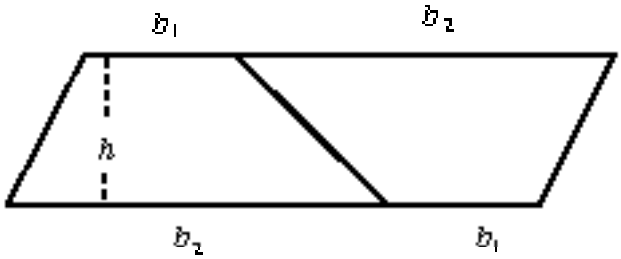
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

El área de un trapecio

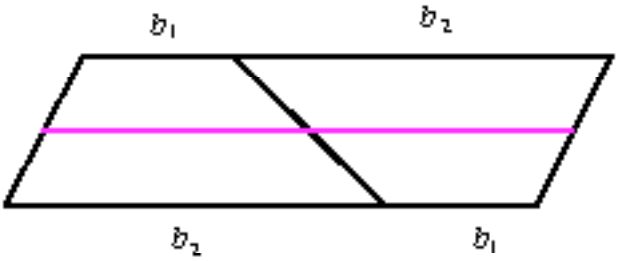
Corte dos trapecios idénticos. Sea b_1 la longitud de la base más larga del trapecio, b_2 la longitud de la otra base, y h su altura (ver figura).

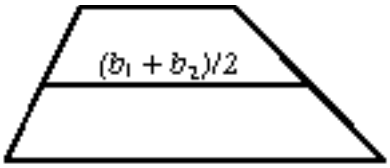


Voltea uno de los trapecios de modo que juntos formen un paralelogramo. *¿Cuál es la longitud de la base del paralelogramo en términos de b_1 y b_2? ¿Cuál es su altura? ¿Cuál es el área del paralelogramo?* Relacione el área del trapecio con el área del paralelogramo. Escriba una fórmula para el área del trapecio.



Otra interpretación de la fórmula.
En cada trapecio traza la línea que pasa por los puntos medios de los lados no paralelos. Esta línea se llama la mediana. Voltea un trapecio para formar un paralelogramo. *¿Qué observa acerca de las dos medianas de los trapecios?*



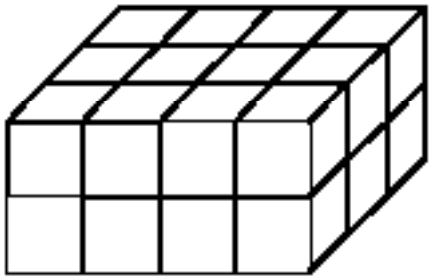


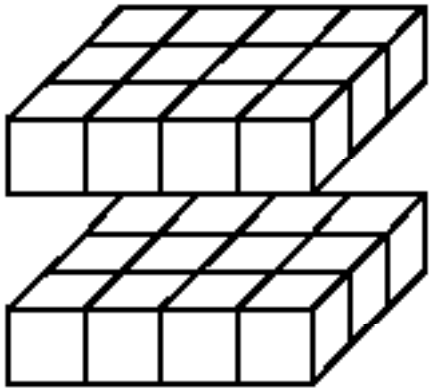
Dé un argumento convincente que la longitud de la mediana del trapecio es igual a $(b_1+b_2)/2$. Explique por qué otra interpretación de la fórmula para el área del trapecio es multiplicar la longitud de la mediana por la altura.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

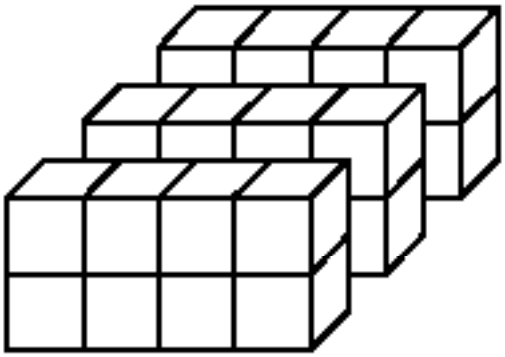
Formas

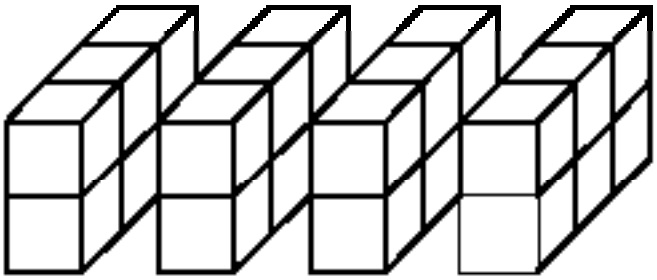
Actividad 1. Explicar la fórmula para el volúmen



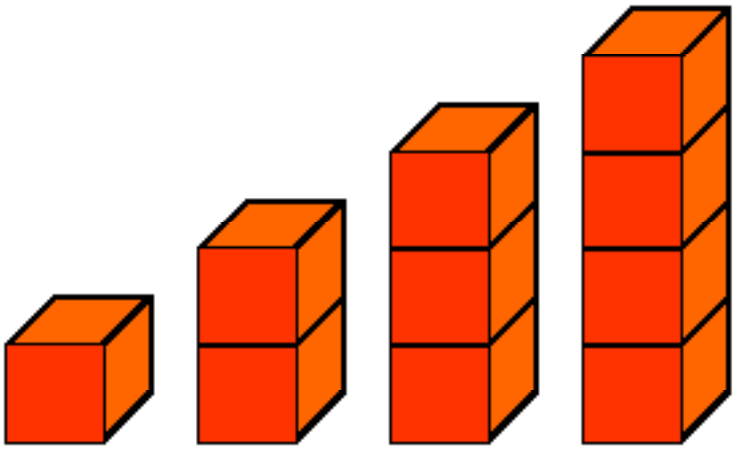


Actividad 3. El volúmen y la propiedad asociativa de la multiplicación





Actividad 4. Ejemplo de torres que crecen

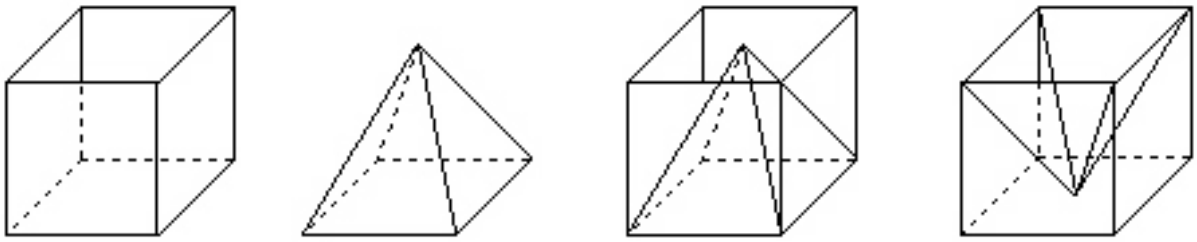


Número de cubos (N)	Superficie en unidades cuadradas (S)
1	6
2	
3	
4	

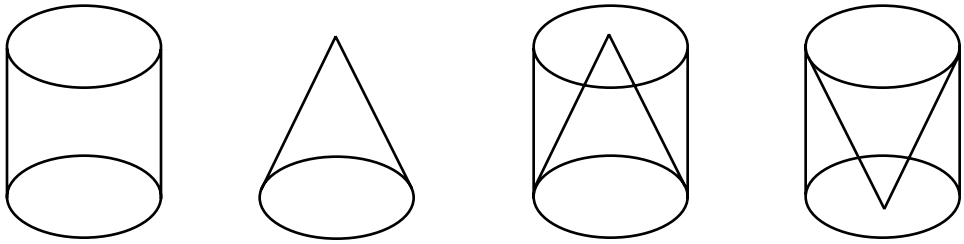
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Formas

Actividad 6. El volúmen de una pirámide de base cuadrada



Actividad 7. El volúmen de un cono



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Volúmen

Medir un volúmen es comparar con el cubo unitario (un cubo de dimensiones 1 x 1 x 1 de volúmen 1).

Actividad inicial

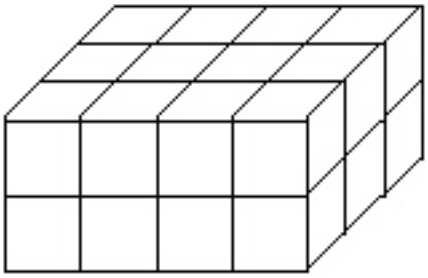
1) Construya un sólido rectangular de dos por tres por cuatro usando los cubos unitarios.
   - *¿Cuántos cubos usó? ¿Cómo puede contar el número de cubos en forma sistemática?*

2) Separe el sólido rectangular en rebanadas. Cuente el número de cubos en cada rebanada. Hay varias formas de rebanar un sólido rectangular. Dependiendo de cómo haya sido rebanado,
   - *¿Que representan los productos parciales 2 x 3 ó 2 x 4 ó 3 x 4?*

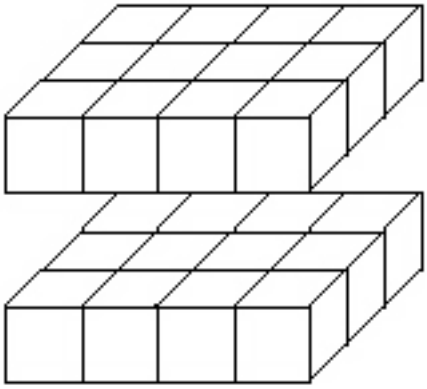
Fórmulas para volúmen

Actividad 1. Explicar la fórmula para el volúmen.

1) Una caja rectangular tiene una base de área B y una altura de longitud c.
El volúmen de esta caja es V = B x c. Justifique esta fórmula en términos del número de cubos unitarios en la caja.



2) Imagine que un bloque se corta en rebanadas (de una unidad de grosor). Calcule el número de cubos unitarios en cada rebanada.
   - *¿Cómo se relaciona esto con el área de la base?*
   - *¿Cuántas rebanadas hay?*
   - *¿Cómo se relaciona esto con la altura?*



Actividad 2. Explicar la fórmula largo por ancho por altura

1) Un bloque rectangular tiene dimensiones a, b, c. Otra fórmula para el volúmen del prisma es V = a x b x c. Justifique esta fórmula en términos del número de cubos unitarios que caben dentro del bloque.

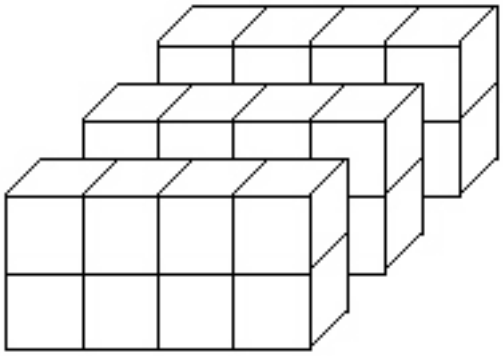
2) Muestre que las dos fórmulas son equivalentes. En Estados Unidos, el volúmen de agua usada para irrigación se mide algunas veces en acre-pie.
   - *¿Qué fórmula se está utilizando?*

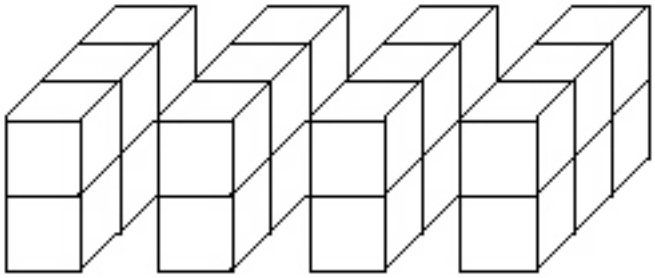
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Volúmen

Actividad 3. El volúmen y la propiedad asociativa de la multiplicación

La multiplicación es asociativa. Esto es, para cualesquiera números a, b, c se tiene a _ (b _ c) = (a _ b) _ c. Describa cómo un ladrillo se puede rebanar en dos formas diferentes para ilustrar esta propiedad.



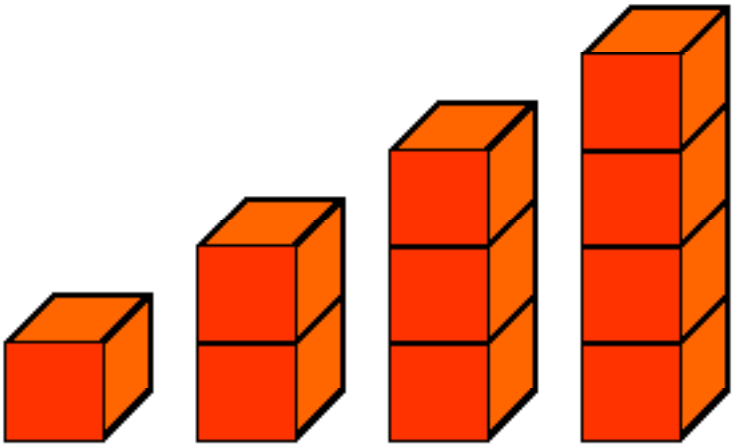


$3 \times (2 \times 4) = (3 \times 2) \times 4$

Actividad 4. Ejemplo de torres que crecen

1) Construya torres con cubos de madera como se indica en la figura.
   - *¿Cuál es la superficie exterior de cada torre de cubos?* (sin incluir la base)

2) Organice la información en una tabla. Describa la relación entre la superficie exterior y el número de cubos con sus propias palabras. Describa qué patrones nota y describa la relación mediante una ecuación.



Número de cubos (N)	Superficie en unidades cuadradas (S)
1	6
2	
3	
4	

3) Note que la superficie exterior aumenta cuatro unidades cuando añadimos otro cubo a la torre (*¿por qué?*). Exprese el área de la superficie como una función del número de cubos, primero en español y luego usando símbolos.

Actividad 5. Superficie y volúmen de figuras semejantes

Una situación muy diferente en cuanto a la manera en que cambian el volúmen y la superficie exterior es cuando todas las dimensiones de una figura cambian en la misma proporción. Calcule el área de la superficie exterior y el volúmen de un prisma rectangular de 2 _ 3 _ 5. Si cada una de sus dimensiones se multiplica por 2, obtendremos un nuevo prisma de 4 _ 6 _ 10.

- *¿Cuál es la superficie del nuevo prisma?*
- *¿Cuál es el volúmen?*

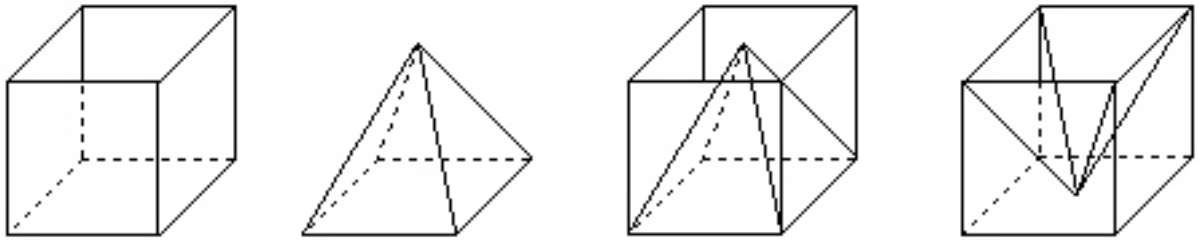
Justifique su respuesta de al menos dos formas distintas. Note que la superficie aumenta en un factor de 4, mientras que el volúmen aumentó por un factor de 8.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

El volúmen de una pirámide y un cono

Actividad 6. El volúmen de una pirámide de base cuadrada.

1) Las siguientes figuras representan un cubo, y una pirámide con la misma base y la misma altura que el cubo. Para determinar el volúmen de la pirámide la podemos llenar de granos o agua, y vaciar el contenido repetidamente en el cubo.



- *¿Cuántas veces cree que el volúmen de la pirámide cabe dentro del volúmen del cubo con la misma base y la misma altura?*

Haga una predicción, luego observe o realice el experimento.

2) Verifique que el cubo y la pirámide tengan la misma altura, y que el área de sus bases sea la misma. Llene la pirámide con material de empaque o con semillas. Vierta el contenido de la pirámide en el cubo abierto. Cuente cuántas veces cabe el volúmen de la pirámide dentro del cubo.

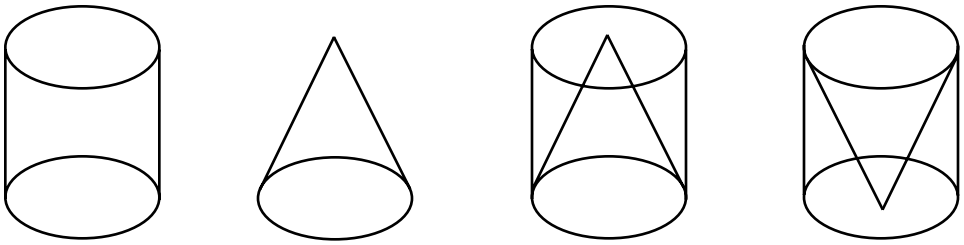
3) El volúmen del cubo está dado por V = B _ h.

- *Con base en el experimento, ¿cuál sería la fórmula para el volúmen de la pirámide?*

Actividad 7. El volúmen de un cono

1) Las siguientes figuras representan un cilindro recto y un cono que tiene la misma base y la misma altura que el cilindro.

- *¿Cuál es el volúmen del cono comparado con el volúmen del cilindro?*



- *¿Cuántas veces cree que cabe el volúmen del cono dentro del volúmen del cilindro con la misma base y la misma altura? Haga una predicción y luego el experimento.*

2) Llene el cono con granos o con pequeños objetos livianos. Vacíe el contenido del cono dentro del cilindro. Repita el proceso hasta que se haya llenado el cilindro. Cuente cuántas veces cabe el volúmen del cono en el cilindro con la misma base y la misma altura.

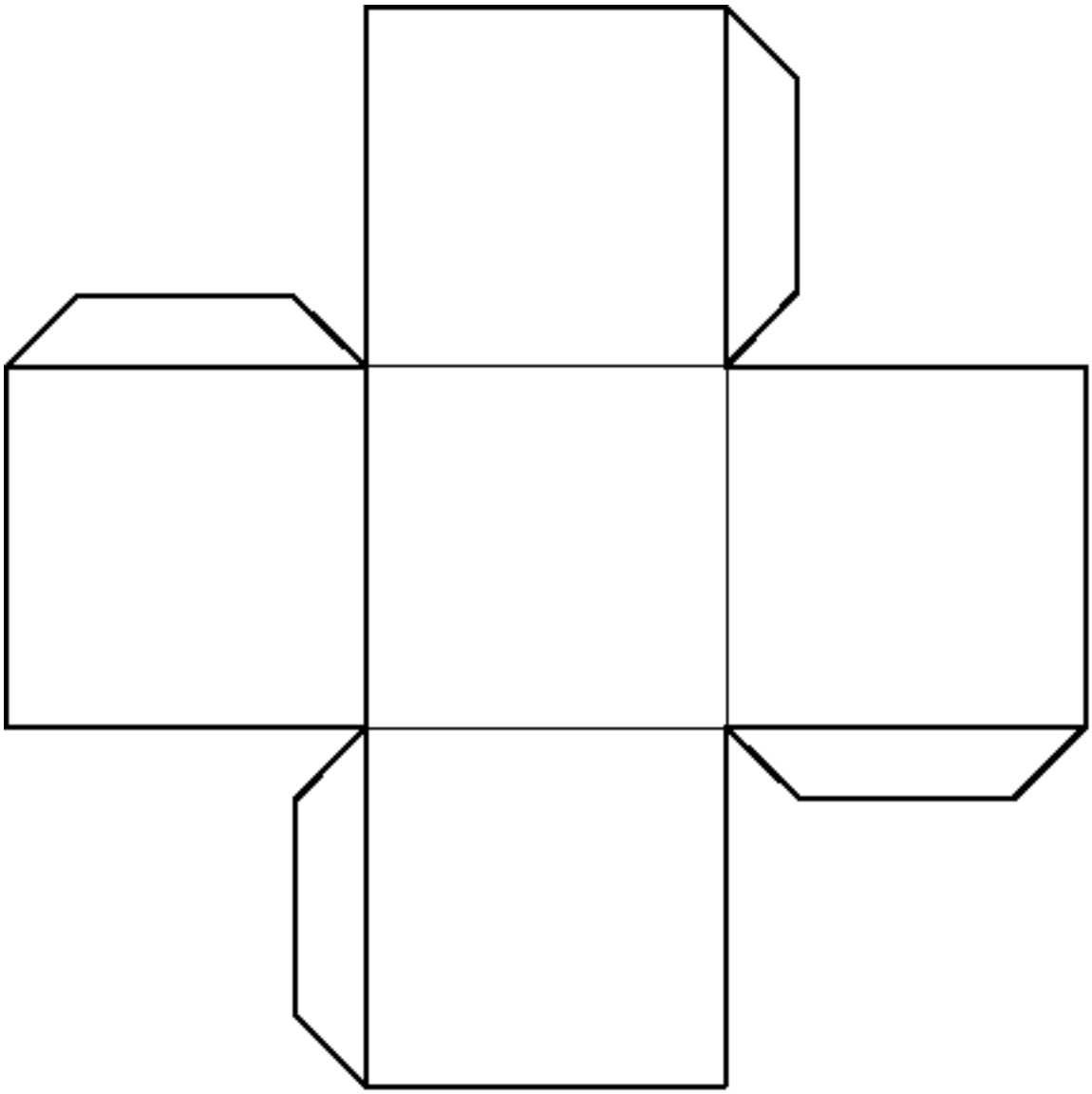
3) El volúmen del cilindro está dado por el producto del área de la base por la altura, V = B _ h.

- *Con base en el experimento anterior, ¿cuál sería una fórmula para el volúmen de un cono?*

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Cubo

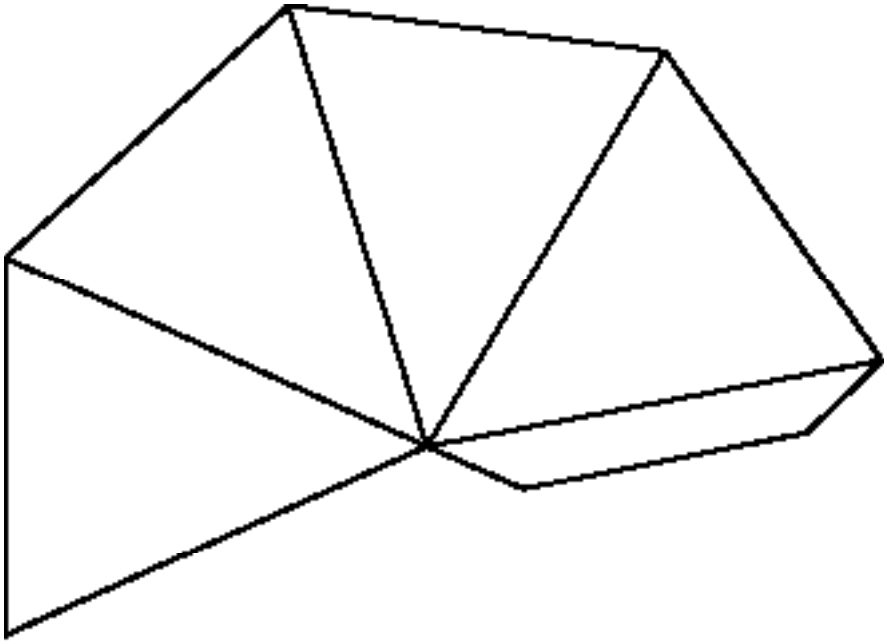
Pegue en cartulina y recorte. Doble a lo largo de las líneas interiores. Pegue las solapas para formar un cubo abierto.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Pirámide

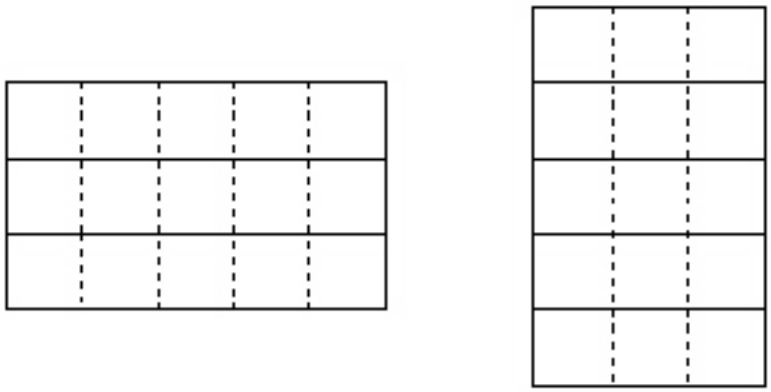
Pegue en cartulina y recorte. Doble a lo largo de las líneas interiores. Pegue la solapa para formar una pirámide sin base.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Representaciones geométricas de operaciones aritméticas

Use el modelo de área para ilustrar la propiedad conmutativa de la multiplicación con sus propios ejemplos. Describa los dos rectángulos primero en español y luego con números. "Tres hileras de cinco cuadrados", "Cinco hileras de tres cuadrados."

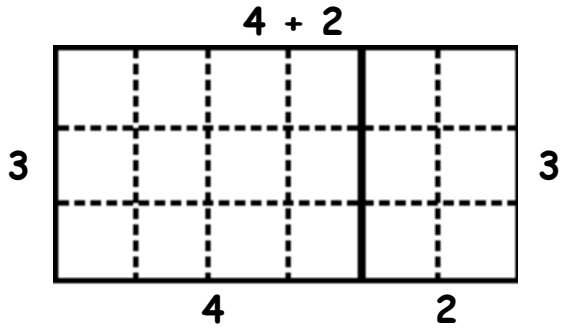


$5 \times 3 = 3 \times 5$

El uso de diagramas geométricos puede ayudar a las personas a ver propiedades geométricas de un vistazo. En este caso, el modelo de área muestra inmediatamente que la multiplicación es conmutativa ("nada más rota el rectángulo"). En contraste, a menos de que uno calcule la suma de ambos lados, tal vez no sea evidente para las personas la representación de la multiplicación como sumas repetidas.

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 5 + 5$

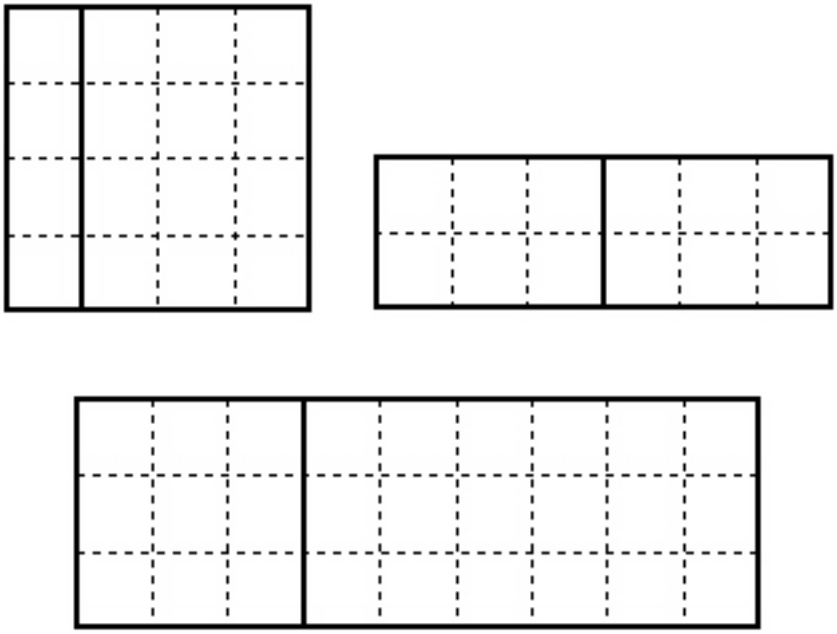
Representación geométrica de la propiedad distributiva
El siguiente rectángulo ilustra $(4 + 2) \times 3 = 4 \times 3 + 2 \times 3$



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Representaciones geométricas de operaciones aritméticas

Escriba las igualdades correspondientes que describen la propiedad distributiva para los siguientes rectángulos.



Use mosaicos cuadrados o una retícula para ilustrar las siguientes identidades:

$$(5 + 3) \times 3 = 5 \times 3 + 3 \times 3$$

$$(10 + 2) \times 3 = 10 \times 3 + 2 \times 3$$

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

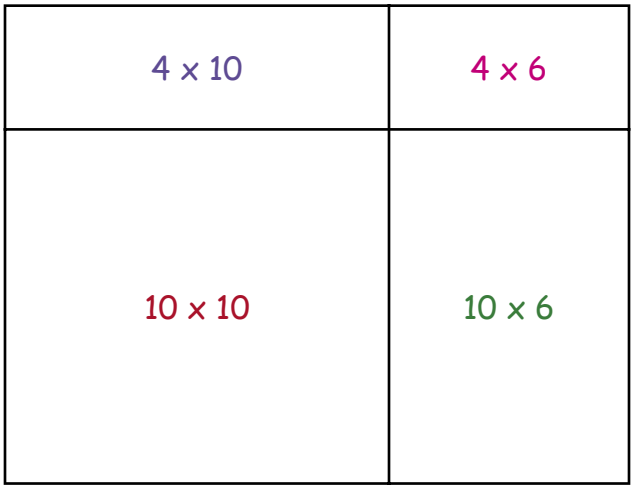
Representaciones geométricas de operaciones aritméticas

Hacer la propiedad distributiva explícita en la multiplicación de números de dos dígitos.
Describa el procedimiento explícito que se presenta para multiplicar 14 x 16, relaciónelo con el algoritmo que conozca y con una representación geométrica.

16	14
x 14	x 16
64	84
160	140
224	224

Para el primer procedimiento en la figura de abajo, ¿dónde está representado 64? ¿Qué parte representa 160? Descomponga el proceso en todos sus pasos.

16
x 14
24
40
60
100
224

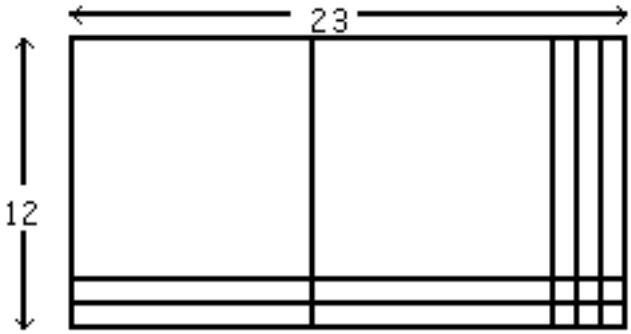


¿Cómo se relaciona este proceso con la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma?
(10 + 6) x (10 + 4)

Otro ejemplo, 12 × 23

Explique cuáles productos parciales representan cada uno de los siguientes números 6, 40, 30, 200. Identifique las áreas correspondientes en el rectángulo de abajo.

23	20 + 3
× 12	× 10 + 2
46	40 + 6
230	200 + 30
276	200 + 70 + 6



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geometría con papel doblado

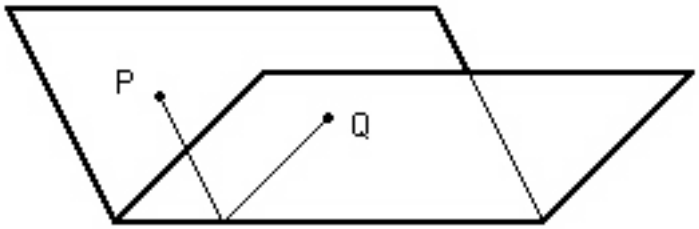
Actividad 1. Una línea recta

El papel encerado funciona mejor para ver los pliegues. El papel para separar hamburguesas (patty paper) es muy práctico (en hojas de 5 por 5 pulgadas).

Construcciones básicas

Una línea recta

- Marque dos puntos P y Q en el papel para hamburguesas.
- Doble la hoja de papel de modo que el punto P quede exactamente encima del punto Q.
- Mantenga los dos puntos P y Q firmemente unidos usando un dedo y la mesa, y pliegue el papel con la otra mano.
- Extienda el pliegue en ambas direcciones para formar una línea recta.
- Marque un punto arbitrario R sobre el pliegue.
  ¿Qué puede decir acerca de la distancia de R a P y a Q?
- Doble otra vez a lo largo del pliegue para verificar.
- Use otros puntos a lo largo del pliegue para convencerse que los puntos en el pliegue son equidistantes de P y de Q.

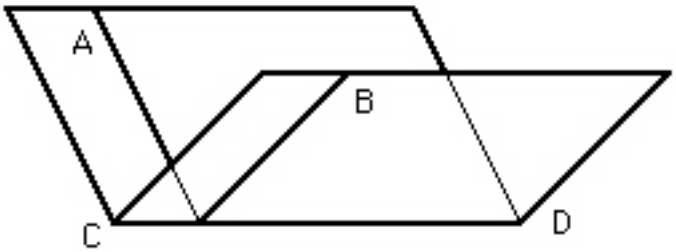


- Trace el segmento que conecta los puntos P y Q.
  ¿Cómo es el ángulo formado por el segmento trazado y el pliegue?
  ¿En dónde intersecta el pliegue al segmento?

Actividad 2. Una línea recta perpendicular a una línea dada

Una recta que es perpendicular a un segmento y lo divide en dos partes iguales se llama la mediatriz del segmento.

- Trace un segmento y haga un pliegue que divida al segmento a la mitad y que sea perpendicular a él.
- Trace o doble una línea recta AB sobre una hoja de papel.
- Doble la hoja de modo que un segmento de la línea dada AB se doble sobre sí misma.
- Mantenga las líneas unidas con el pulgar y el índice de una mano y forme un pliegue con la otra mano.



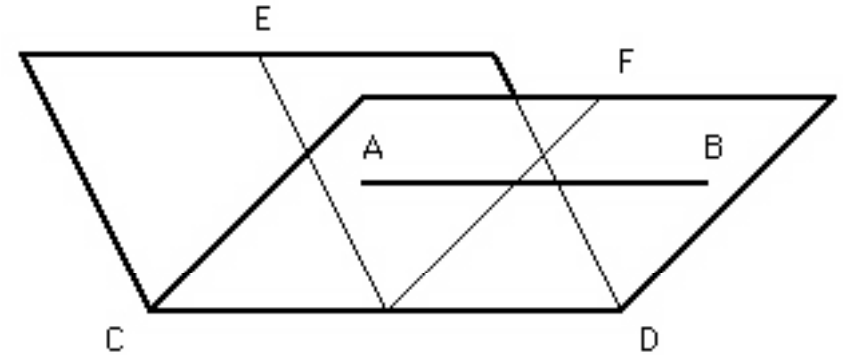
- Observe el ángulo entre la línea original y el nuevo pliegue.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geometría con papel doblado

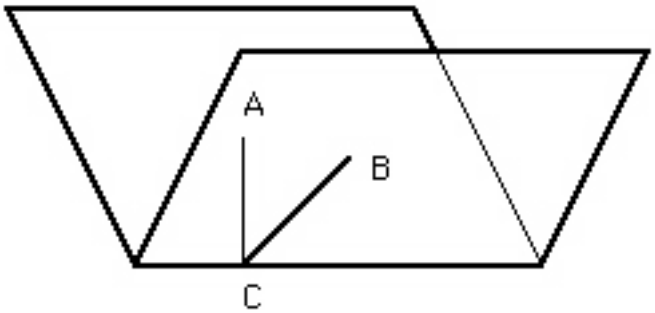
Actividad 3. Una recta paralela a una recta dada

- Trace o doble una recta AB. Construya EF perpendicular a AB (como en el ejercicio anterior). Luego construya CD perpendicular a EF.
  ¿Qué puede decir de AB con respecto a CD?



Actividad 4. Divida un ángulo a la mitad

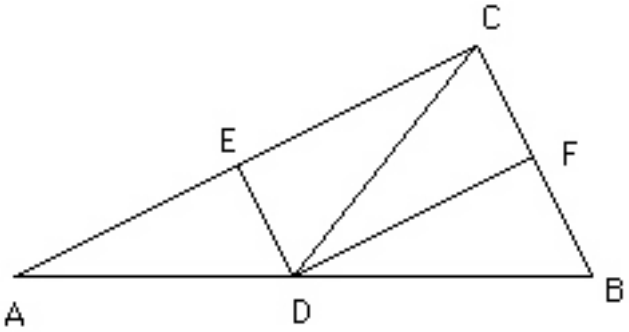
- Trace un ángulo ACB (esto es, el vértice del ángulo es C).
- Doble y pliegue el papel de modo que los lados CA y CB del ángulo coincidan uno encima del otro.
- Abra el papel y observe los dos ángulos más pequeños que se forman.
  ¿Qué puede decir acerca de ellos?



Otras actividades doblando papel

Actividad 5. El punto medio de la hipotenusa

- Recorte un triángulo rectángulo (un triángulo con un ángulo de 90°).
- Encuentre el punto medio del lado más largo (este lado se llama la hipotenusa).
- Muestre doblando el papel que el punto medio de la hipotenusa está a la misma distancia de cada uno de los tres vértices.

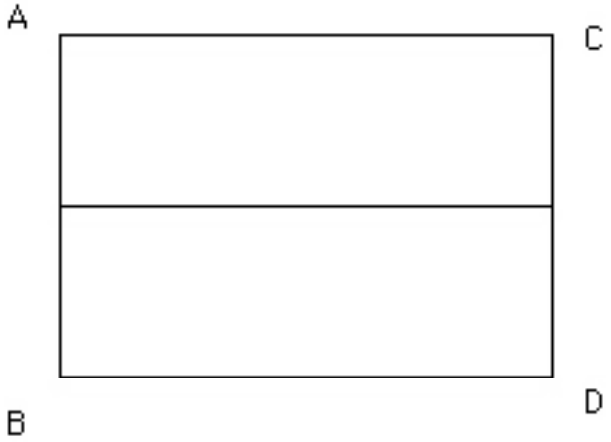


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

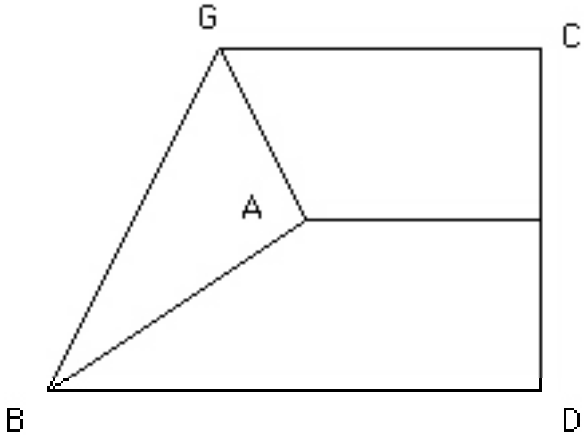
Geometría con papel doblado

Actividad 6. Un ángulo de 60º

En una pieza rectangular de papel ABCD doble la mediana, es decir la línea que es equidistante de los bordes y es paralela a ellos. Puede hacer esto sobreponiendo AC encima de BD. Abra el pedazo de papel.

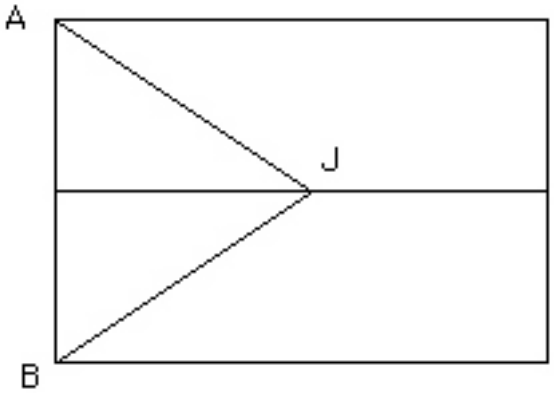


Ahora doble el vértice A sobre la mediana de modo que el pliegue resultante GB pase por B.



Marque la posición de A sobre EF y denote este punto por J. Trace el segmento JB.

¿Puede dar evidencia convincente de que el ángulo ABJ es de 60˚?

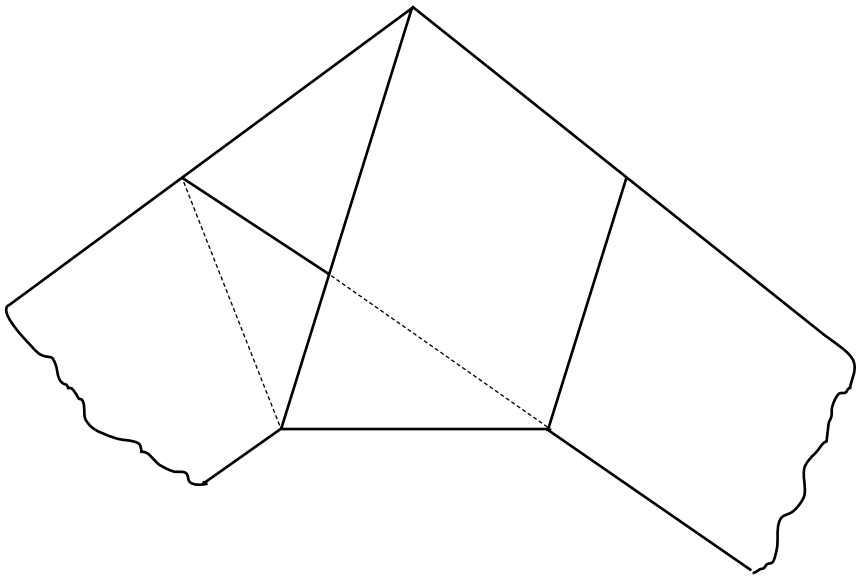


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Geometría con papel doblado

Actividad 7. Un pentágono regular de una tira de papel

Use una tira larga de papel de ancho constante (el papel de las máquinas sumadoras funciona muy bien). Amarre un nudo sencillo, apriete el nudo y pliéguelo para que quede plano. Observe que el nudo forma un pentágono regular.



Referencia

Johnson, Donovan. *Paper folding for the mathematics class*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividades al aire libre para la circunferencia

Actividad 1. Un círculo con gente

Forme un círculo con 3/4 de los participantes (por ejemplo, si hay 16 personas, 12 formarán el círculo). Las personas se toman de la mano para formar una figura cerrada y estiran los brazos para formar el círculo. Luego, la otra cuarta parte de los participantes forman un diámetro dentro del círculo (si doce personas forman el círculo, entonces cuatro van adentro).

- *¿Cuál es la razón entre el número de personas en la circunferencia y el número de personas en el diámetro?*

Actividad 2. ¿Qué distancia hay alrededor de un círculo?

(Adaptada de Lovitt & Clark, p. 209)

Materiales necesarios: Una cuerda de aproximadamente ocho metros por cada grupo de tres personas.

1. Demostración ante el grupo completo

Se necesitan tres personas con una cuerda. La persona que permanece en el centro se queda quieta y detiene un extremo de la cuerda. El caminante parado junto a la persona del centro, toma la parte de la cuerda que está libre, y camina cuatro pasos, desenrollando la cuerda. El observador marca la posición inicial del caminante. Luego el caminante da pasos alrededor, y los cuenta, siempre manteniendo tensa la cuerda, mientras la persona del centro da vuelta para que no quede enrollada por la cuerda (pero sin moverse de su lugar).

- *Si el caminante sigue caminando hacia adelante, manteniendo la cuerda tensa, ¿qué forma tendrá su camino?*

Sorprendentemente, no siempre es obvio para todas las personas que la trayectoria será un círculo. Es una oportunidad para incluir vocabulario tal como radio y circunferencia.

- *¿Cuántos pasos cree que el caminante dará alrededor del círculo?*

Las estimaciones serán una indicación de las percepciones de los participantes. La respuesta correcta es aproximadamente 25. El rango de estimaciones es sorprendente y vale la pena discutirlo con el grupo. Anote cuántas de las estimaciones están por debajo de 25 y cuántas están por arriba. Si los participantes hacen una estimación, estarán más interesados en la precisión de su estimación.

2. Trabajo en grupos pequeños

Es más benéfico para todos los participantes que experimenten la caminata ellos mismos, especialmente aquellos cuyas estimaciones muestran una percepción pobre. Los participantes se dividen en grupos de tres y hacen las diferentes actividades incluyendo la primera de los cuatro pasos, y algunas que ellos mismos escojan. Indique que deben hacer una estimación antes de cada caminata, y turnarse para estar en el centro y para caminar.

3. Discusión

Cuando la mayor parte de los grupos haya completado la tabla, reúna al grupo completo.

- *¿Fueron mejorando las estimaciones?*
- *¿Puede ver una relación entre la distancia alrededor del círculo y la distancia desde el centro?*
- *¿Es esta relación válida en todos los casos?*

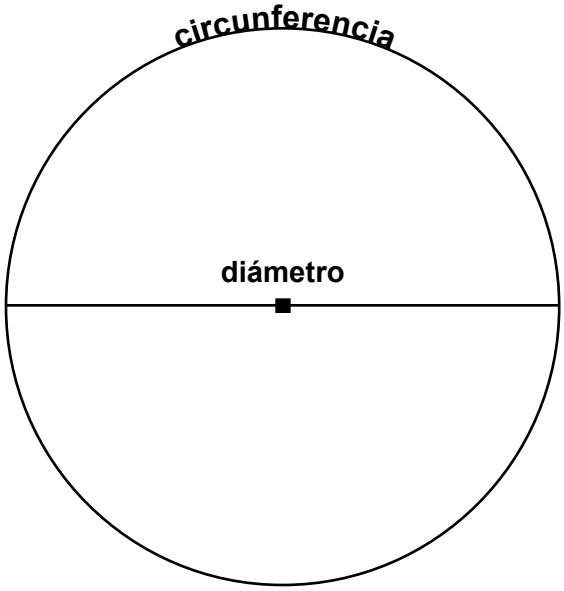
La relación parece ser que la distancia alrededor es aproximadamente seis veces la distancia desde el centro, aún con pasos grandes. Durante los experimentos, los participantes se interesaron en el efecto de usar consistentemente pasos pequeños o grandes. Se sorprendieron al descubrir que la relación no cambió aún cuando se usaron pasos de diferente tamaño.

Puede haber discusión abundante acerca de las diferentes respuestas que obtienen los participantes y acerca de los errores de medición que pueden ocasionar las diferencias. La mayor parte de los resultados fueron $C=6r$, o $C=7r$ (donde C es el número de pasos alrededor y r es el número de pasos desde el centro). Sin embargo, la precisión del valor no es lo importante en esta actividad. Lo que es importante es la existencia de la relación proporcional entre C y r. El resultado global es que cada persona reconocerá que la circunferencia es aproximadamente seis veces el radio. Esta es una buena base sobre la cual construir una apreciación de la fórmula $C = 2r\pi$.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

La relación entre la circunferencea y el diámetro

El diámetro de un círculo es dos veces el radio. También es la distancia más grande a través de un círculo.



Materiales. Para estas actividades se necesitan latas, frascos, tapas circulares, y otros objetos que tengan un círculo; cinta de papel para máquina sumadora, cinta de medir en centímetros, calculadora.

Actividad 1

Corte una tira de papel para máquina sumadora que mida la distancia alrededor de la lata (circunferencia). Use otra tira de papel para medir la distancia a través (diámetro). Despliegue las dos tiras una al lado de la otra. Compare las longitudes de las dos tiras.

- *¿Qué puede decir acerca de sus tamaños relativos?*

Repita la actividad con otros objetos que tengan círculos de diferentes tamaños. Para cada círculo, compare las tiras de papel que corresponden al diámetro y a la circunferencia.

Actividad 2

Mida con la cinta métrica (centímetros) la circunferencia de la lata. Mida el diámetro. Anote su valor en la tabla.

Repita la actividad con otros objetos que tengan círculos de diferentes tamaños.

- *¿Qué puede decir acerca de la longitud de la circunferencia comparada con la del diámetro correspondiente?*

Use una calculadora para calcular la razón de la circunferencia al diámetro. Reporte el valor con una cifra después del punto decimal.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Tabla de diámetro, circunferencia, y razón

Diámetro *d*	Circunferencia *c*	Razón *c / d*

Esta es una tabla con los valores obtenidos por un grupo de participantes. Compárela con su propia tabla

Diámetro *d*	Circunferencia *c*	Razón *c / d*
16.5	50	3.0
9	28	3.1
7.5	24.5	3.2
7	21	3.0
5.5	18	3.2
10	31.4	3.1
4.5	13.5	3.0
9.4	28.7	3.0

Note que en cada caso la razón c / d es un poco más que 3. Más precisamente, es aproximadamente 3.1. La razón no depende del tamaño del círculo. El valor de la razón c / d se llama π (pi). Debido a errores de medición, no se puede calcular exactamente el valor de π midiendo. Valores más exactos de π se pueden calcular con otros medios. Para propósitos prácticos, aproximar π como 3.14 es suficientemente adecuado.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Área de un círculo

Actividad 1. Contar cuadrados unitarios

Como vimos antes, el área de una figura plana está dada por el número de unidades cuadradas que caben adentro. Así, en principio, podríamos determinar el área de un círculo usando una cuadrícula. Puede contar cuántos cuadrados completos hay adentro, y estimar cuántas fracciones de cuadrados necesita añadir (ver figura 1).

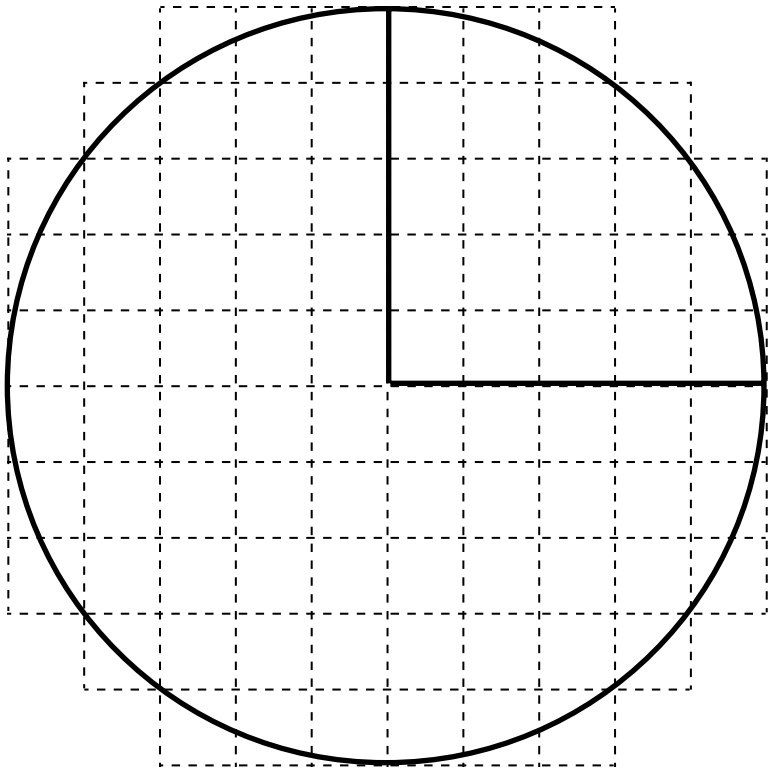


Figura 1. Círculo en cuadrícula de cm cuadrados

Esta forma de calcular el área, aunque conceptualmente muy clara, tiene la desventaja que cuando contamos los cuadrados y las fracciones, la estimación que se obtiene no es muy exacta.

Ejercicio

Cuente el número de unidades cuadradas que están contenidas en un cuarto del círculo. Asegúrese que incluye en su cuenta las fracciones de los cuadrados contenidos. Multiplique su estimación por cuatro para aproximar el área total del círculo.

En principio, podríamos obtener mejores estimaciones usando una cuadrícula más fina. El error sería menor, pero la desventaja es que llevaría demasiado tiempo. En vez de esto vamos a usar una estrategia diferente para calcular el área del círculo, comparando el área total del círculo con el área del cuadrado del radio.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Círculo en cuadrícula

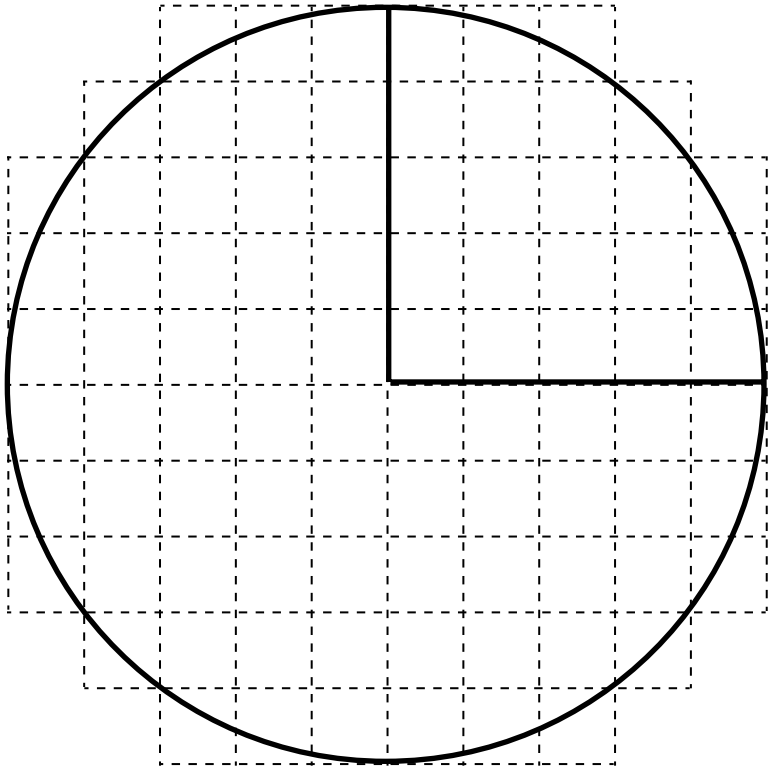


Figura 1. Círculo en cuadrícula de cm cuadrados

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividad 2. Cuadrado del radio

Primera estimación de la razón del área del círculo al área del cuadrado del radio. Estime cuántas veces cabe el cuadrado del radio dentro del círculo.

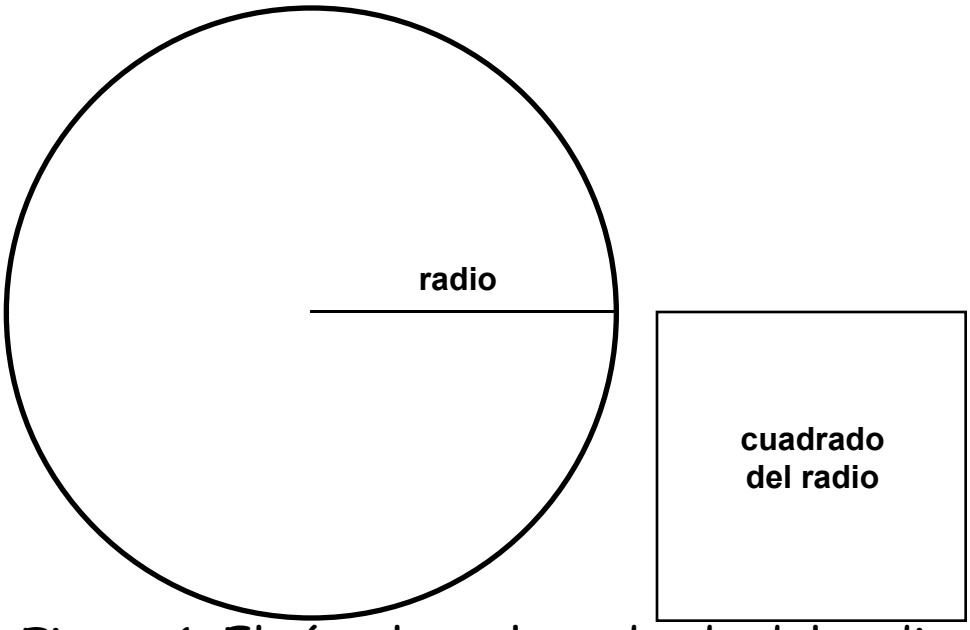


Figura 1. El círculo y el cuadrado del radio

Use la figura 2 para ver que el cuadrado del radio cabe más de dos veces dentro del círculo.

¿Cabe el cuadrado del radio cuatro veces dentro del círculo?

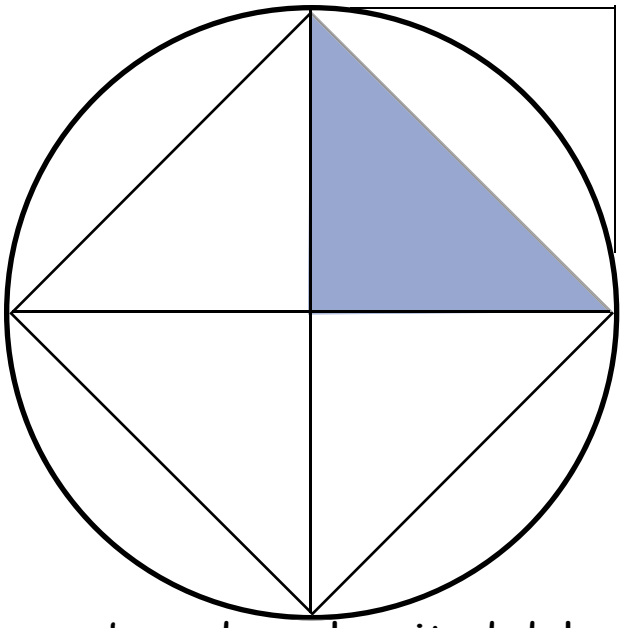


Figura 2. El área sombreada es la mitad del cuadrado del radio

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

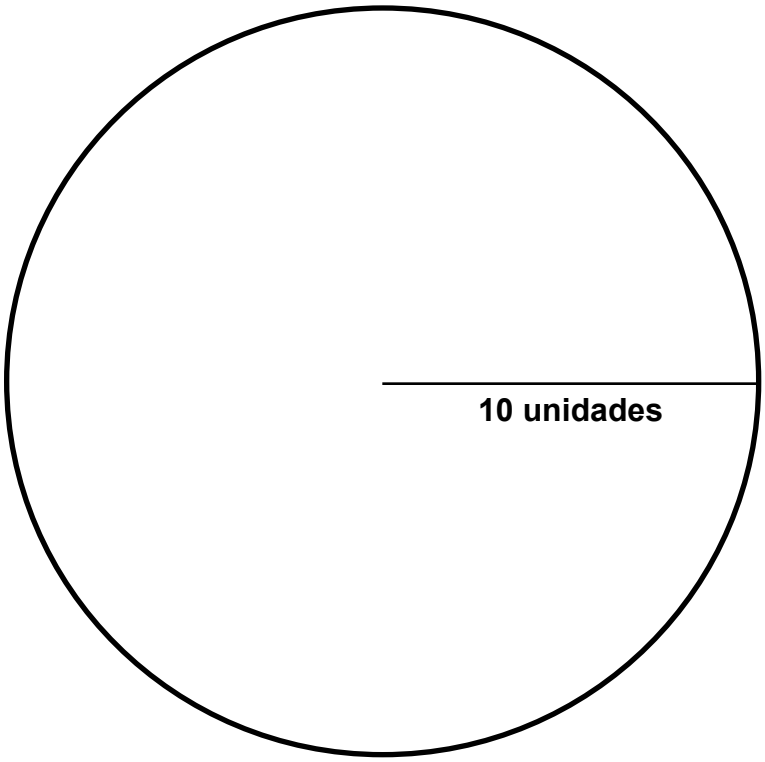
Círculo con el radio

Actividad 2. Cuadrado del radio

1) Instrucciones para los participantes.
2) Recorte el círculo.
3) Recorte el primer cuadrado coloreado y acomódelo completamente dentro del círculo. Recorte el segundo cuadrado coloreado y acomódelo dentro del círculo sin que se traslape con el primer cuadrado. Va a tener que cortar partes del segundo cuadrado de modo que no quede nada por fuera y acomodarlas dentro del círculo. Puede acomodar las piezas de los cuadrados de varias maneras. Use todo el segundo cuadrado antes de usar el tercer cuadrado.
4) Continúe con el tercer cuadrado coloreado. Asegúrese que no haya traslapes y que no queden partes por fuera del círculo.
5) Después de que haya terminado de acomodar el tercer cuadrado dentro del círculo, vea si hay lugar suficiente para parte del cuarto cuadrado (el que está cuadriculado).
6) Guarde lo que le sobra del cuarto cuadrado y utilice la cuadrícula para estimar cuánto del cuarto cuadrado pudo acomodar.
   - *¿Cuántos cuadrados pudo acomodar completamente?*
   - *¿Cuánto del cuarto cuadrado pudo acomodar?*
   - *Cuente cuántos de los pequeños cuadrados unitarios usó.*
   - *Describa la relación del área del círculo con el área del cuadrado del radio con sus propias palabras.*
   - *Con base en esta actividad, ¿cuál es una estimación de la razón del área del círculo al área del cuadrado del radio?*

Materiales

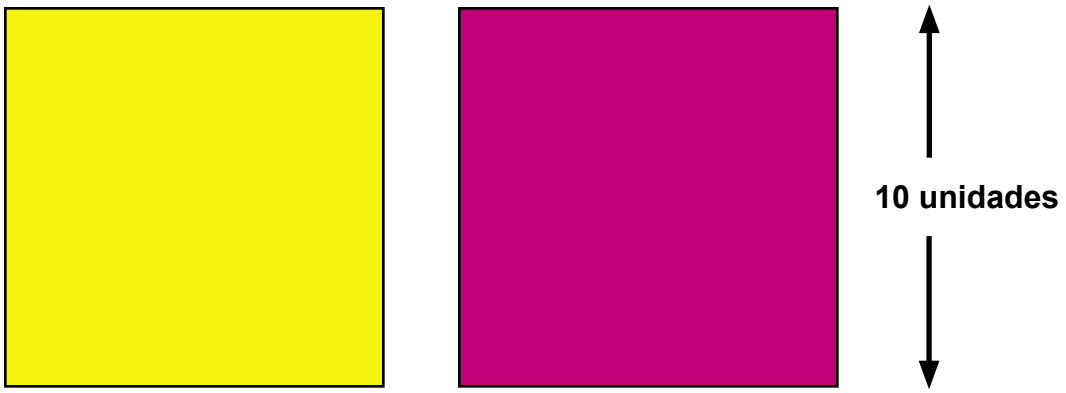
Los cuadrados que se incluyen son cuadrados del radio del círculo dado. Recorte los cuadrados y recorte el círculo. Siga las instrucciones de la Actividad 1.



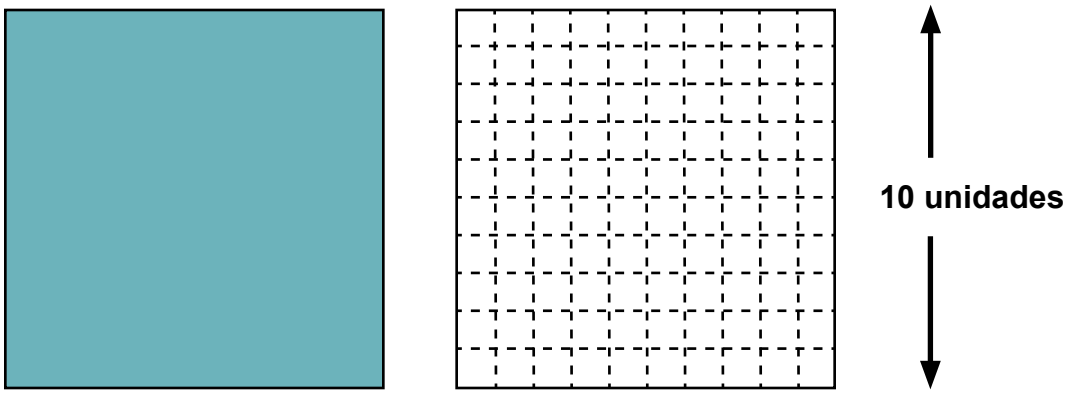
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Cuarto cuadrado del radio

Actividad 2. Cuadrado del radio (continuación)



primer cuadrado del radio segundo cuadrado del radio



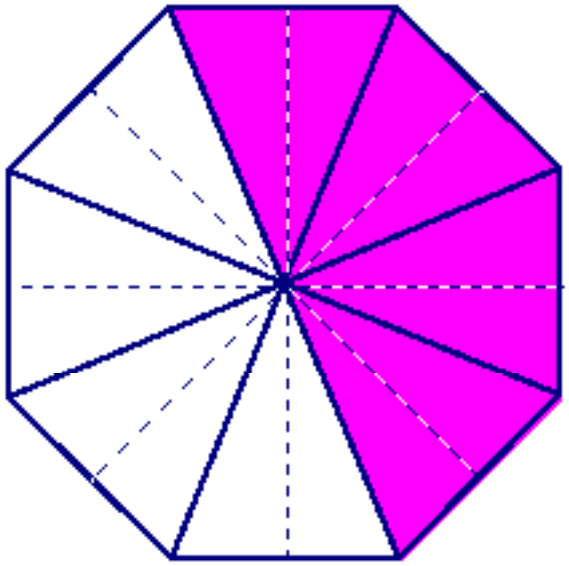
tercer cuadrado del radio cuarto cuadrado del radio

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

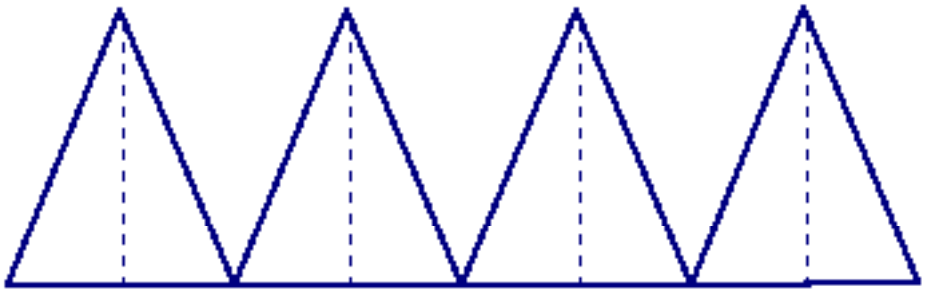
Área de polígonos regulares

Los vértices de este polígono regular han sido conectados con el centro (líneas continuas), formando triángulos. Las líneas punteadas marcan la distancia perpendicular de cada lado al centro. Esta distancia se llama apotema. Note que la mitad de los triángulos están de un color y la otra mitad de otro.

- *¿Cuántos lados tiene el polígono?*
- *¿Cuántos triángulos se han formado?*
- *¿Cuántos de cada color?*



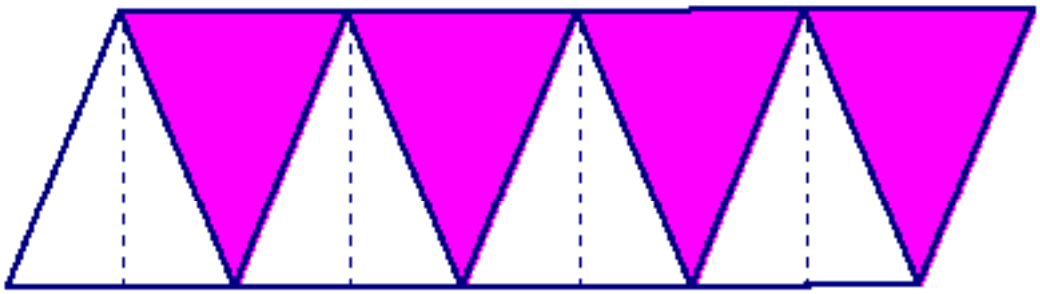
a) Corte el polígono en triángulos a lo largo de las líneas continuas (NO las líneas punteadas). Acomode los triángulos de un color de modo que sus bases estén sobre la misma línea.



b) Coloque los triángulos del otro color "hacia abajo" para llenar los huecos. Va a formar un paralelogramo con los triángulos de dos colores.

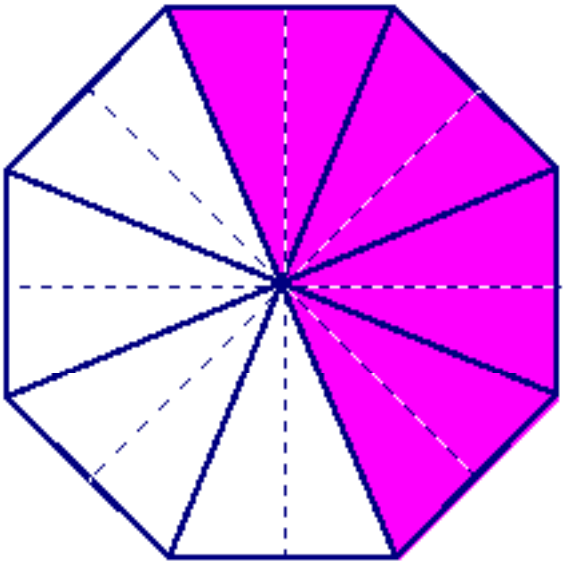
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Área de polígonos regulares



c) Comparar la longitud de la base del paralelogramo con el perímetro del polígono original.
d) Escriba una expresión para la base del paralelogramo en términos del perímetro del polígono.
e) Comparar la altura del paralelogramo con la apotema del polígono original.
f) *¿Cuál es el área del paralelogramo comparada con el área del polígono"/\?*
g) Escriba una expresión para el área del paralelogramo en términos del perímetro y la apotema.
h) Escriba una expresión para el área del polígono original en términos del perímetro y la apotema.

Materiales
Corte los triángulos a lo largo de las líneas continuas.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Relación entre las fórmulas para el área y la circunferencia

La Figura 1 muestra un círculo de radio r. Su circunferencia se puede calcular usando la fórmula $2 \times r \times \pi$. El círculo está dividido en 12 sectores iguales. La mitad de ellos se han coloreado, la otra mitad son blancos.

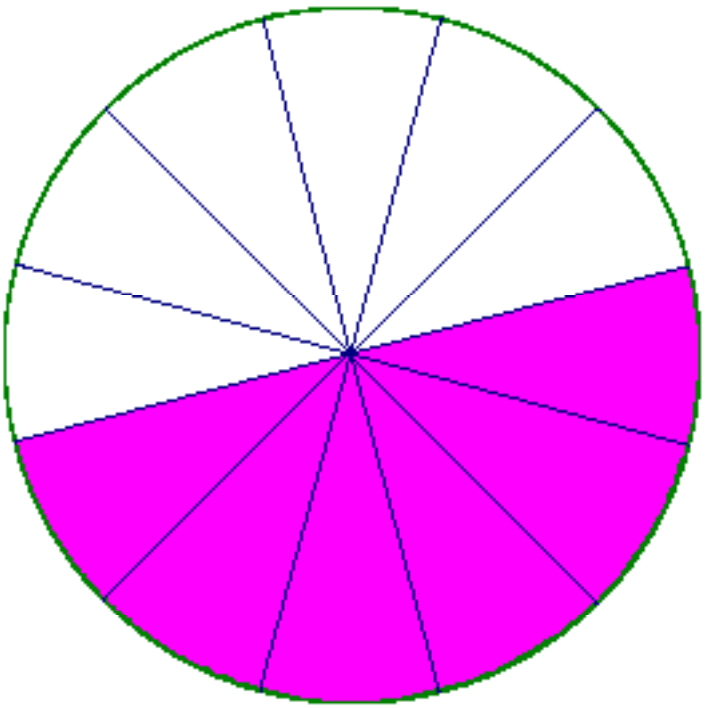


Figura 1. El círculo cortado en 12 rebanadas.

Imagine que recorta los 12 sectores y los reacomoda para formar una figura que se parece a un paralelogramo como se muestra en la figura 2. El área del círculo es la misma que el área de esta figura. Para calcular el área de esta figura usaremos el hecho que se parece a un paralelogramo, aunque su 'base' no es del todo recta. Usaremos la fórmula para el área del paralelogramo, Área = base x altura.

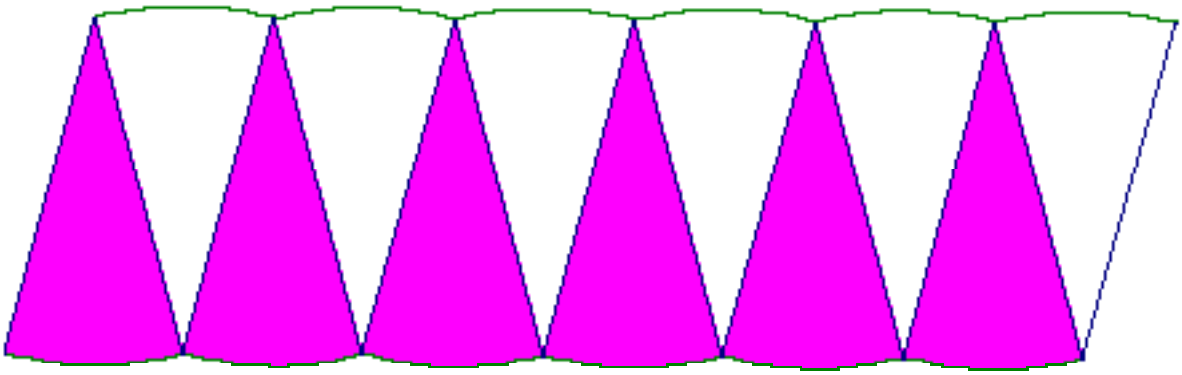


Figura 2. Las rebanados del círculo reacomdadas.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Relación entre las fórmulas para el área y la circunferencia

1) *¿Cuál es la suma de las longitudes de los pequeños arcos que forman la 'base' del 'paralelogramo' comparada con la circunferencia del triángulo original? ¿Por qué?*

2) Escriba una expresión para la mitad de la circunferencia en términos del radio del círculo.

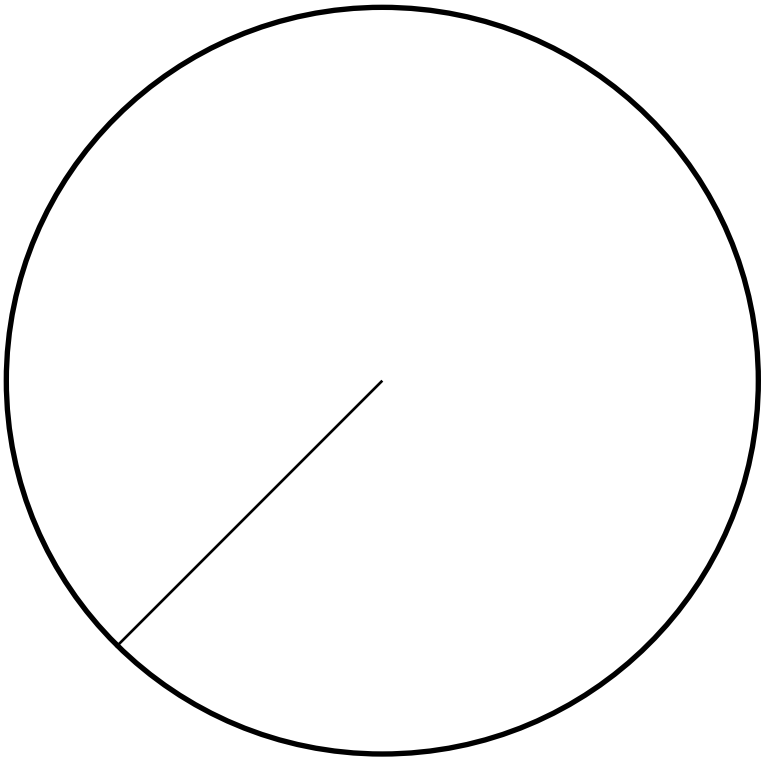
3) Explique por qué la suma de los arcos de la 'base' de la figura reacomodada es $r\pi$.

4) Compare la altura del 'paralelogramo' con la longitud del radio del círculo original.

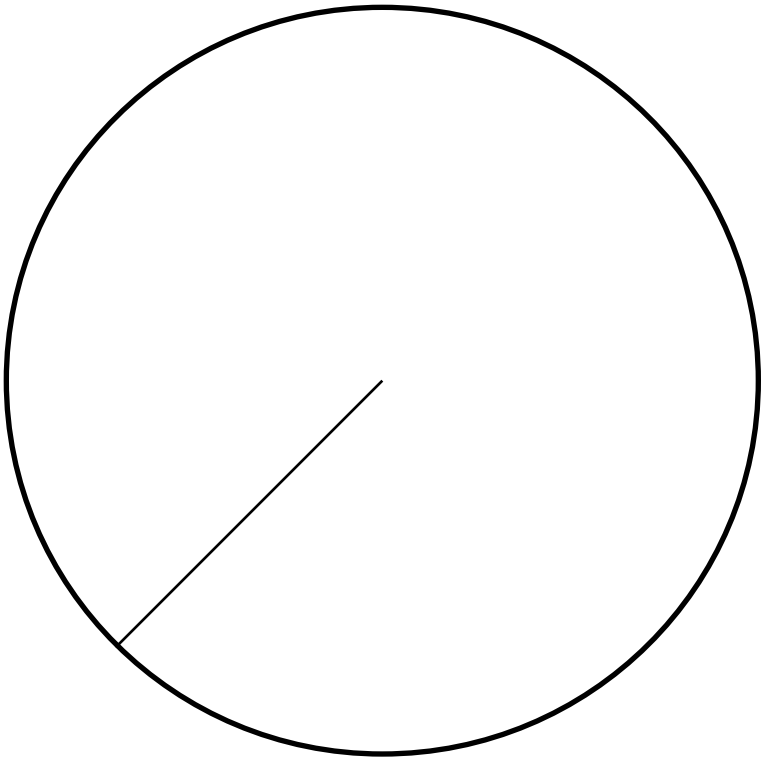
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un cono hecho de un círculo

Recorte el círculo y corte a lo largo del radio indicado.



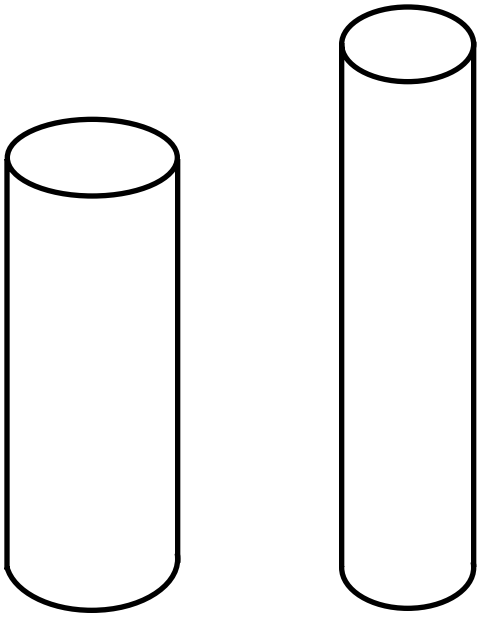
Recorte el círculo y corte a lo largo del radio indicado.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Cilindros con la misma superficie lateral

Tome dos hojas de papel iguales de 11 pulgadas por 8.5 pulgadas. Forme un cilindro alto con una hoja juntando y pegando los dos bordes largos del rectángulo. Con la otra hoja forme un cilindro más corto juntando y pegando los lados más cortos del rectángulo. Los cilindros tienen sólo la superficie lateral, no la base ni la tapa. Esto es, se parecen más a un tubo que a una lata sin abrir.



Dos cilindros hechos con rectángulos iguales.

a) *¿Cuál de los dos cilindros cree que tenga un volúmen más grande?*
b) *Puede hacer un experimento y llenar el cilindro delgado y alto con material de empaque y luego vaciar el contenido en el otro cilindro. Muchas personas se sorprenden con el resultado. ¿Qué ha observado?*

En lo que sigue veremos cómo podemos calcular los volúmenes de los dos cilindros para entender el resultado.

c) *¿Cuál es la circunferencia de la base del cilindro más alto*
d) *¿Cuál es la altura del cilindro*
e) *¿Cuál es la circunferencia de la base del cilindro más bajo*
f) *¿Cuál es la altura del cilindro?*
g) *Calcule el radio de la base de cada cilindro*
h) *¿Cuál es el área de la base de cada cilindro? Recuerde que el área de la base está dada por* πr^2*, esto es, multiplicando el radio por sí mismo y luego por 3.14*

El volúmen de un cilindro se puede calcular multiplicando el área de la base por la altura.

i) *¿Cuál es el volúmen de cada uno de los cilindros?*
j) *Son sus resultados consistentes con el resultado del experimento?*

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

"Calcular la circunferencia" y "El problema inverso"

Material suplementario para grupos que avanzan más rápido que otros grupos en la clase.

Calcular la circunferencia

Si conocemos el diámetro de un círculo, no necesitamos medir la circunferencia, podemos calcularla. Vimos que para cualquier círculo el valor de la razón c / d = 3.14. Podemos usar esta información para calcular la circunferencia si conocemos el diámetro, $c = d$ x 3.14 or $c = d$ x π.

- Calcule la circunferencia de un círculo que tiene un diámetro de 12 cm.
- Calcule la circunferencia de un círculo que tiene un diámetro de 9 pies.

En algunos casos, es el radio r del círculo lo que conocemos. Podemos usar esta información para calcular la circunferencia. Recuerde que dos veces el radio es igual al diámetro 2 x $r = d$. Por tanto, la circunferencia es igual a d x 3.14 ó d x π que será igual a 2 x r x 3.14 or 2 x r x π.

- Calcule la circunferencia de un círculo de radio 2.5 cm.
- *¿Cuál es la circunferencia de un círculo de radio 6 pies?*

El problema inverso

Calcular el diámetro dada la circunferencia.

En algunos casos es fácil medir la circunferencia, pero es más difícil medir el radio, por ejemplo en el caso de un árbol. En este caso podemos calcular el diámetro dividiendo la circunferencia por π. Por ejemplo, si la circunferencia es 23 cm, el diámetro será 23 ÷ π ó bastante cerca 23 ÷ 3.14 = 7.3

- Calcule el diámetro de un círculo que tiene una circunferencia de 4 pies.
- *¿Qué es el radio de un círculo que tiene una circunferencia de 6 pies.*

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un experimento mental

Aproximar el círculo mediante polígonos regulares.

Imagina que tiene una familia de polígonos regulares inscritos en el mismo círculo, construidos de la siguiente manera. Empiece con un hexágono regular (figura 1a). El siguiente polígono tiene 12 lados. Seis de los vértices son los mismos que los vértices del hexágono. Los vértices adicionales son los puntos medios de los arcos (ver figura 1b). De la misma manera, cada término sucesivo de la familia de polígonos tiene el doble de lados. Los perímetros de los polígonos regulares se aproximan más y más a la circunferencia del círculo. Más aún, si usamos un polígono con un número suficientemente grande de lados, podemos hacer la diferencia entre el perímetro del polígono y la circunferencia tan pequeña como queramos. Las áreas de los polígonos regulares se aproximan más y más al área del círculo. También podemos hacer la diferencia entre el área del círculo y el área de uno de los polígonos tan pequeña como queramos si tomamos un polígono con un número suficiente de lados.

El área de un polígono regular se puede calcular multiplicando el perímetro por la altura de uno de los triángulos que forman el polígono (ver figura 2) y dividiendo entre dos. Esto se puede ver de varias maneras. Una es imaginar a todos los triángulos uno al lado del otro (figura 3). El área total del polígono es la suma de las áreas de los triángulos. Un modo de calcular el total es calcular el área de cada triángulo (multiplicamos la base por la altura y dividimos entre dos) y luego sumar las áreas. O podemos sumar las bases primero, lo que nos da el perímetro, y luego multiplicar por la altura y dividir entre dos.

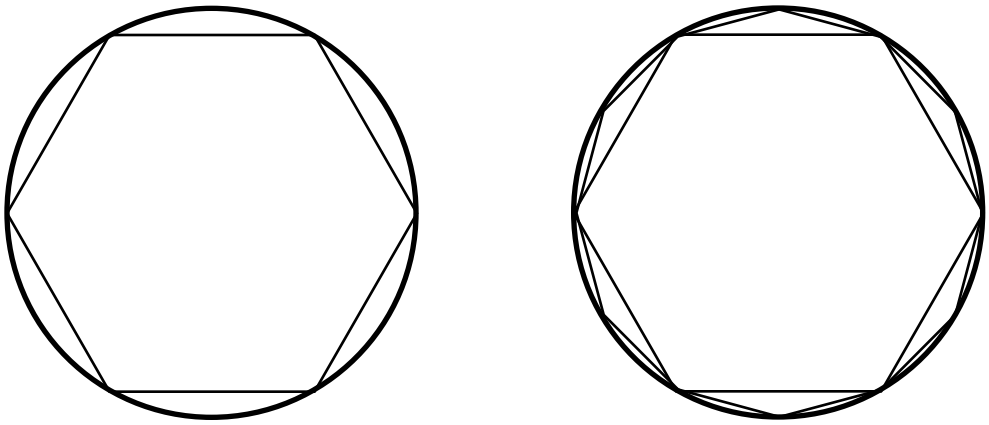
Si el número de lados del polígono es muy grande, la suma de las bases estará muy cerca de la circunferencia del círculo ($2\pi r$), y la altura del triángulo será muy próxima al radio (r). Por tanto, el área del polígono estará muy cerca de $\frac{\text{circunferencia x radio.}}{2}$

Como el área del círculo y la del polígono se pueden hacer tan cercanas como queramos, tenemos que el área del círculo está dada por:

$$\frac{\text{circunferencia x radio}}{2} = \frac{\text{diámetor x } \pi \text{ x radio}}{2} = \frac{2 \text{ x radio x } \pi \text{ x radio}}{2} = \pi \text{ x radio}^2 .$$

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un experimento mental



(a) El hexágono inicial (b) Nuevos vértices en los puntos medios de los arcos

Figura 1. Polígonos regulares que aproximan un círculo.

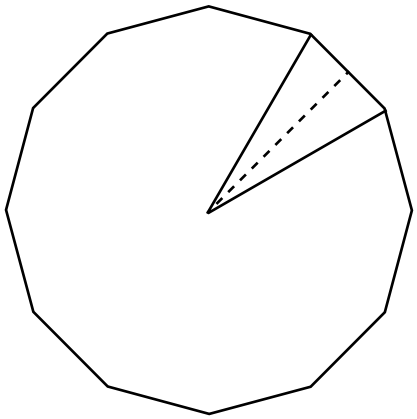


Figura 2. Un triángulo cuya base es un lado del polígono.

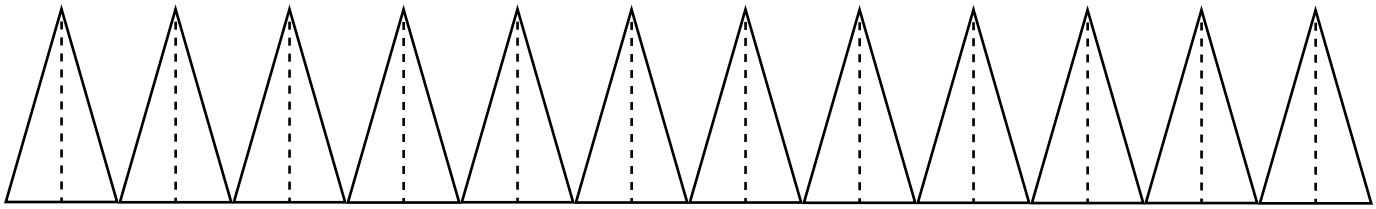


Figura 3. El polígono descompuesto en triángulos.

Podemos también acomodar los triángulos que forman el polígono regular para formar un paralelogramo (ver figura 4). Su base será muy cercana a la mitad de la circunferencia, 1/2 x d x π = 1/2 x 2 x r x π, esto es r x π, y su altura será muy parecida al radio r del círculo. El área del paralelogramo será por tanto muy cercana a πr^2. Conforme el número de lados del polígono regular se aumenta, la altura del paralelogramo correspondiente será más y más parecida al radio del círculo, y su base será más y más parecida a πr. Por tanto, el área del círculo está dada también por $\pi r \times r = \pi r^2$.

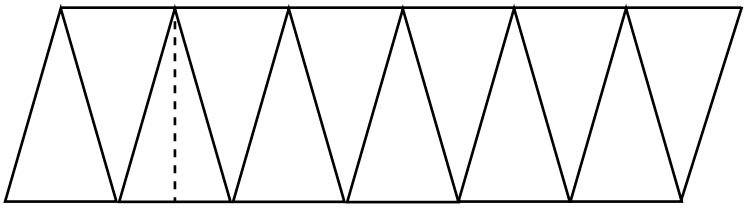
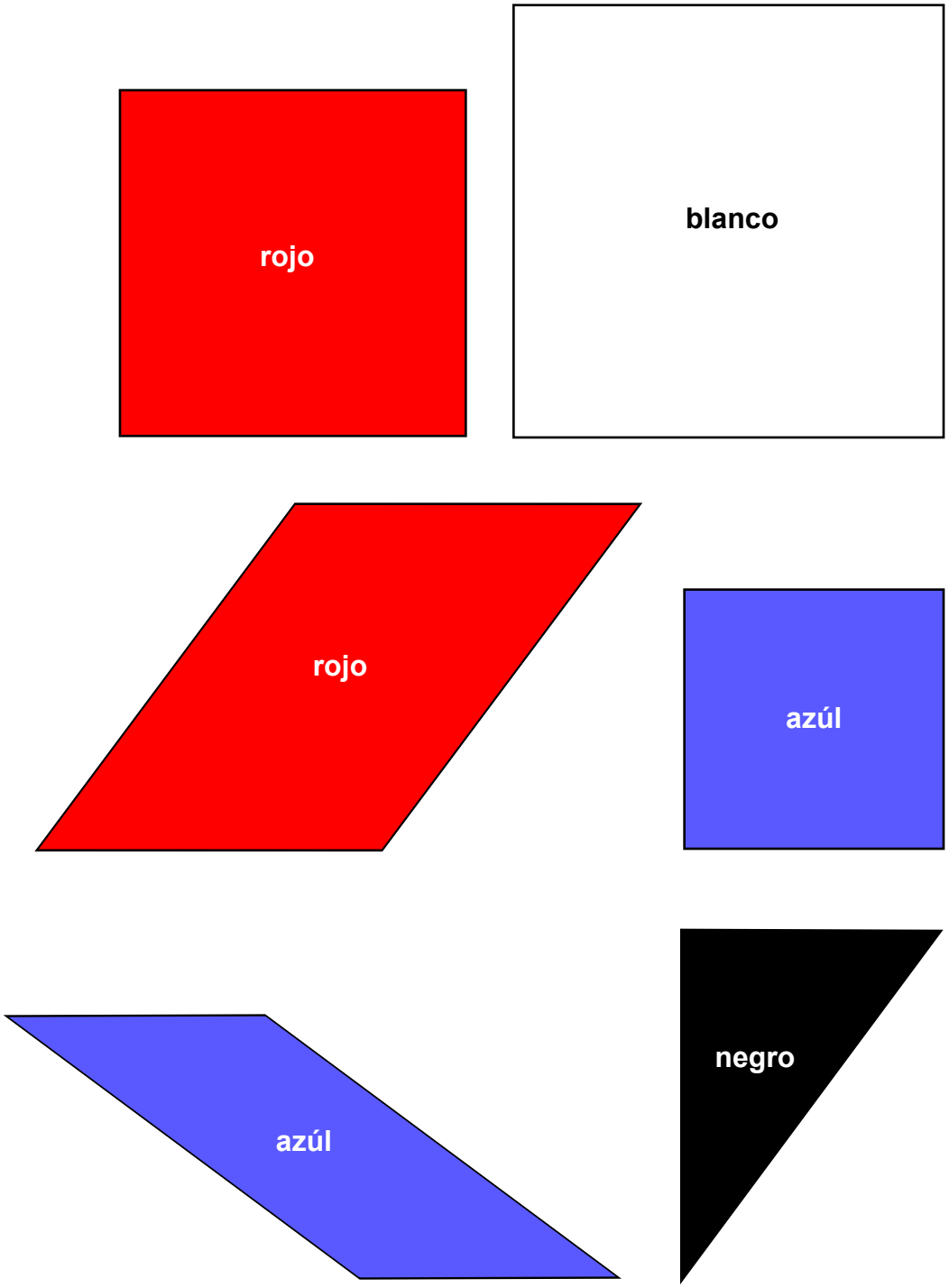


Figura 4. El polígono se reacomoda como un paralelogramo.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Rompecabezas de Pitágoras: Grupo A

Pegue en cartón o copie en cartulina y córtelo.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

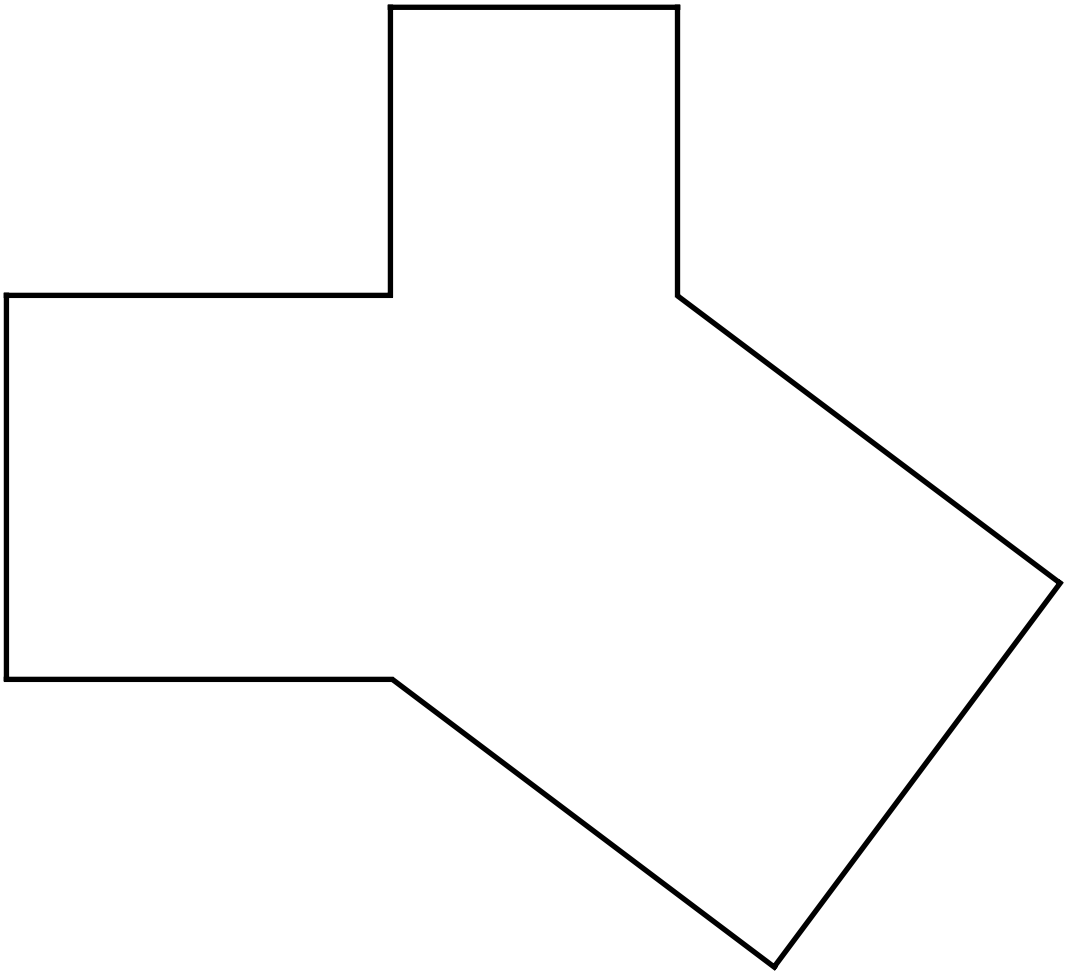
Rompecabezas de Pitágoras A

Actividad 1

Describa las piezas dadas.

¿Qué clase de triángulo se usa para formar este rompecabezas?

Identifque el ángulo recto del triángulo. Los lados que forman el ángulo recto se llaman los catetos del triángulo rectángulo. El lado más grande, el que queda opuesto al ángulo recto, se llama la hipotenusa.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Rompecabezas de Pitágoras A y actividades

Actividad 1

1) Utilice el triángulo y los tres cuadrados para armar el rompecabezas sobre la plantilla base.
2) Compare las longitudes de los lados de los cuadrados con las longitudes de los lados del triángulo.

Actividad 2

1) Con el triángulo, el cuadrado mayor y el menor y el paralelogramo rojo arma el rompecabezas.
   ¿Qué puede concluir con respecto a las áreas del paralelogramo rojo y el cuadrado rojo?
2) Compare el cuadrado rojo con el paralelogramo rojo.
3) Verifique que una de las bases del paralelogramo es igual al lado del cuadrado.
   ¿Qué puede decir de sus alturas del paralelogramo y el cuadrado?

Actividad 3

1) Con el triángulo, el cuadrado mayor, el cuadrado rojo, y el paralelogramo azúl arme el rompecabezas. Compare esta forma de resolver el rompecabezas con la primera.
   ¿Qué puede concluir acerca de las áreas del paralelogramo azúl y el cuadrado azúl?
2) Compare la base del paralelogramo con la base del cuadrado y sus alturas. Verifique que la base del cuadrado azúl es igual a un lado del paralelogramo azúl.
3) Compare la altura del cuadrado azúl con la altura del paralelogramo azúl.

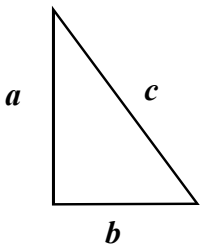
Actividad 4

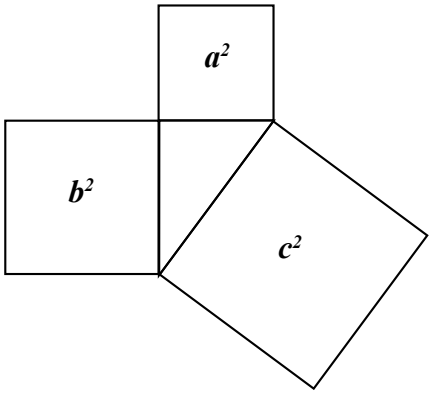
Con el triángulo, los dos paralelogramos y los dos cuadrados menores arme el rompecabezas.
¿Qué puede concluir acerca de las áreas de los dos paralelogramos y el área del cuadrado mayor?

Actividad 5

Usando la información de 2, 3 y 4 *¿a qué conclusión puede llegar?* Relacione la suma de las áreas de los cuadrados en los catetos con el cuadrado del área en la hipotenusa. Enuncie el resultado con sus propias palabras.

Éste es un teorema muy importante en matemáticas, conocido como el teorema de Pitágoras. Si llamamos c, a la hipotenusa, y a y b, a los catetos, el resultado se puede expresar diciendo que en un triángulo rectángulo con hipotenusa c y catetos a y b, $a^2 + b^2 = c^2$.





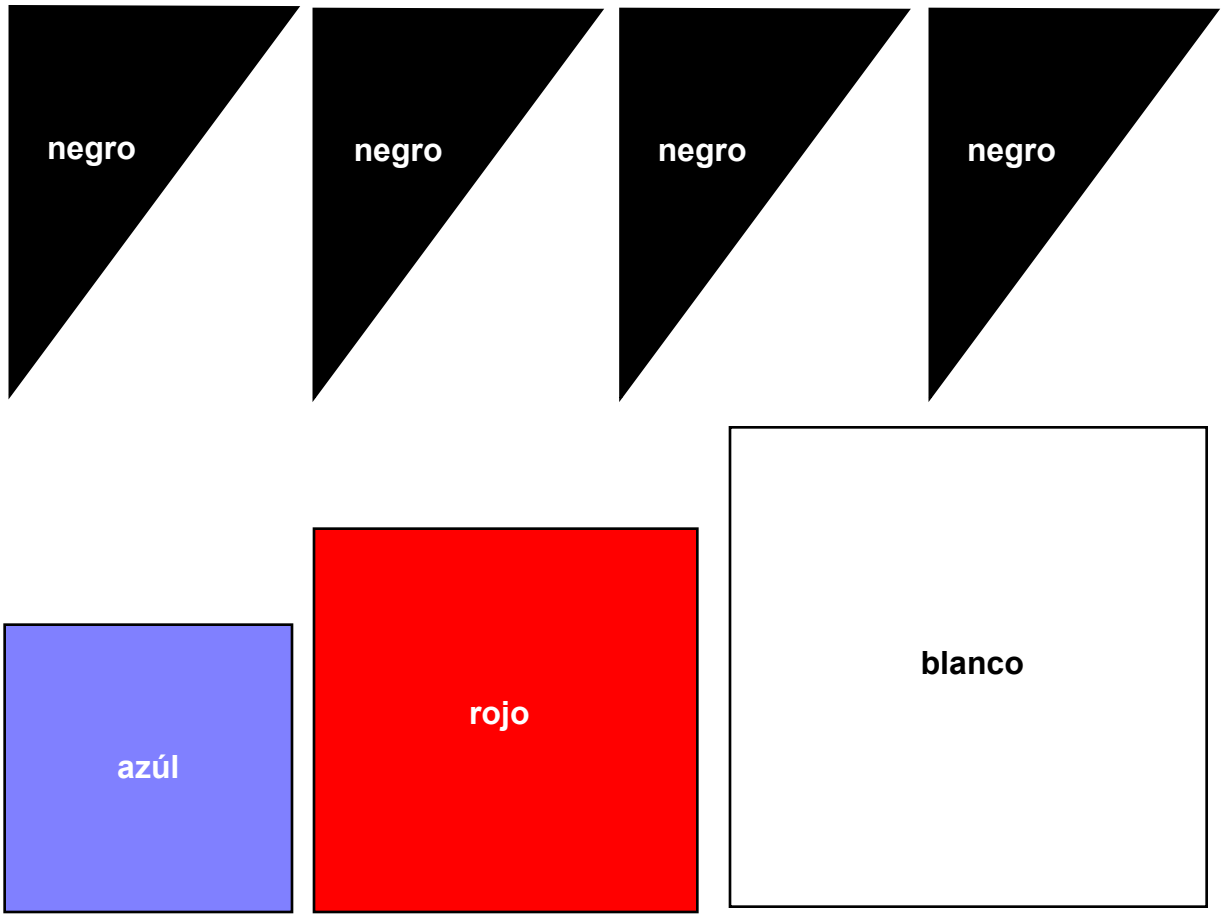
Referencia

Hall, G. D. A Pythagorean puzzle. In *Teacher-made aids for elementary school mathematics: Readings from the Arithmetic Teacher*. National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Rompecabezas de Pitágoras: Grupo B

Pegue en cartón o copie en cartulina y córtelo.



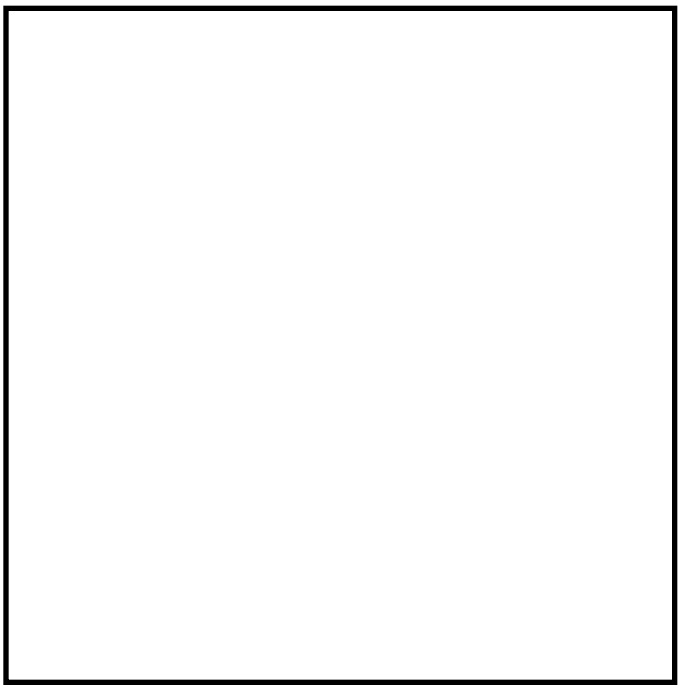
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Rompecabezas de Pitágoras B y actividades

Prueba del teorema de Pitágoras usando cuatro triángulos rectángulo.

Actividad inicial

1) Compare los largos del cuadro abajo con los catetos del triángulo rectángulo.
2) Diga lo que encontró.



Actividad 1

1) Use los cuatro triángulos rectángulos, y los dos pequeños cuadros para llenar el marco.
2) Describa el área del marco en términos de los áreas de las piezas.

Actividad 2

1) Ahora use los cuatro triángulos y el cuadro grande para llenar el mismo marco.
2) Describa el área del marco en términos de los áreas de las piezas.

Comparando Actividad 1 y 2

¿Qué puede concluir sobre el área del cuadro sobre la hipotenusa y los cuadros sobre los catetos?

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Pitágoras en el Geotablilla

Actividad 1. Areas de cuadros inclinados

Se puede usar el teorema de Pitágoras para calcular el área de los cuadros en Figura 1.

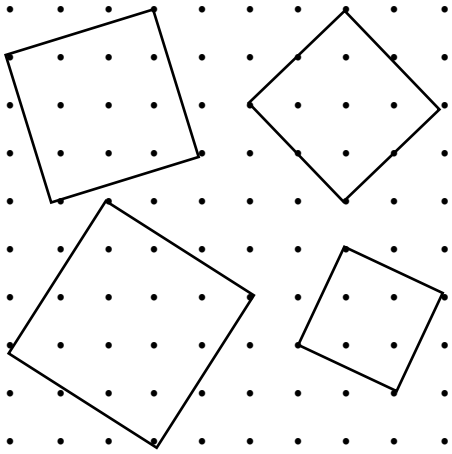


Figura 1

Si tiene un cuadro inclinado en el Geotablilla, puede construir un triángulo rectángulo para que un lado del cuadro inclinado sea la hipotenusa del triángulo rectángulo. Construya cuadros en los catetos formando el angúlo recto. Calcular los áreas de los cuadros de los catetos y añádalos para obtener el área del cuadro sobre la hipotenusa. *¿Qué es el área del cuadro sobre la hipotenusa de las siguientes figuras?*

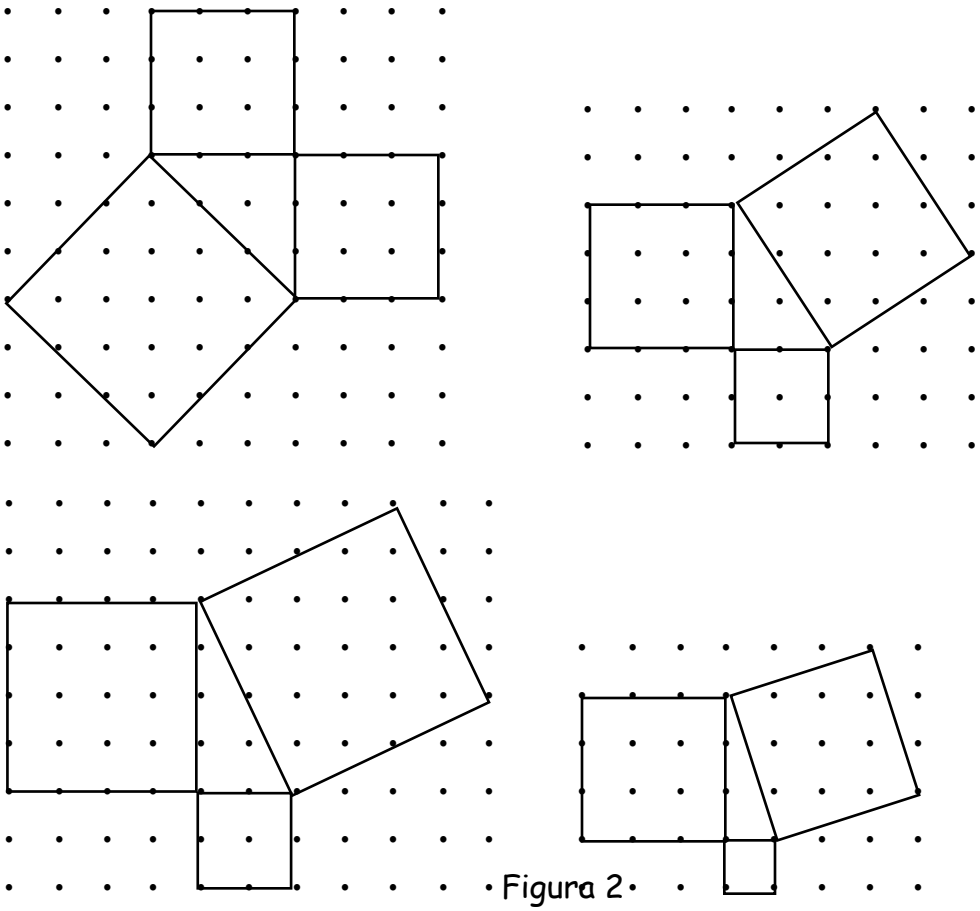


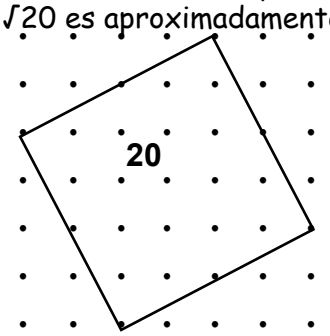
Figura 2

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Pitágoras en el Geotablilla

Actividad 2. Determine el largo de los lados de un cuadro inclinado.

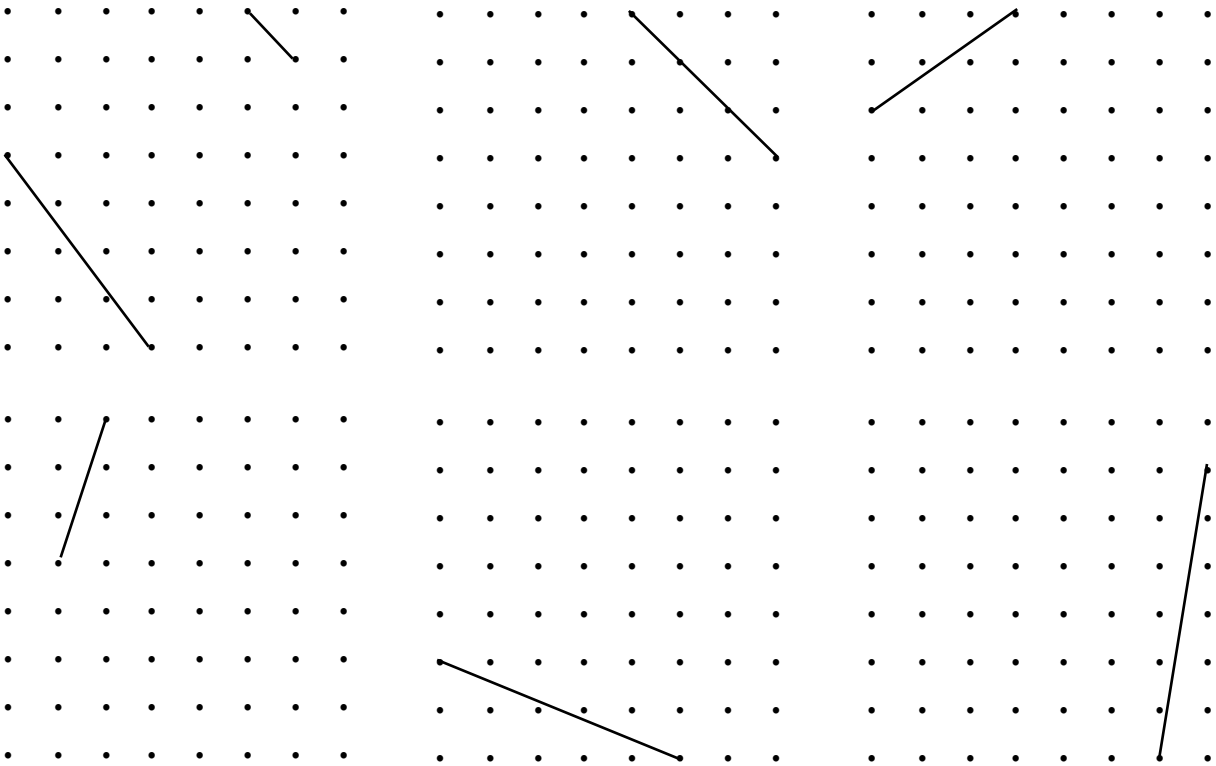
Si sabemos área A de un cuadro inclinado en el Geotablilla, podemos calcular el largo de su lado. Recuerde que para obtener el área de un cuadro multiplicamos el largo de el lado por sí mismo, i.e. $A = s \times s$ o $A = s^2$. Por ejemplo, encontramos el largo del lado de un cuadro con el área de 20. Entonces, necesitamos encontrar un número que multiplicado por sí mismo es 20. Podemos ver que este número tiene ser más grande que 4, porque 4 x 4 = 16. También sabemos que tiene que ser más pequeño que 5 porque 5 x 5 = 25. Los calculadoras tiene una tecla para calcular la raíz cuadrada de un número. Usando un calculador veemos que $\sqrt{20}$ es aproximadamente 4.47.



Ejercicio. Use una calculadora para determinar los largos de los lados de los cuadros inclinados en la última actividad.

Actividad 3. La distancia entre cualesquier dos puntos en el geotablilla

Se puede calcular la distancia entre cualesquier dos puntos en el geotablilla al construir un cuadro que tiene como su lado este segmento. Puede encontrar el área del cuadro. El largo del lado será la raíz cuadrada del área. Encuentre los largos de los segmentos dados.

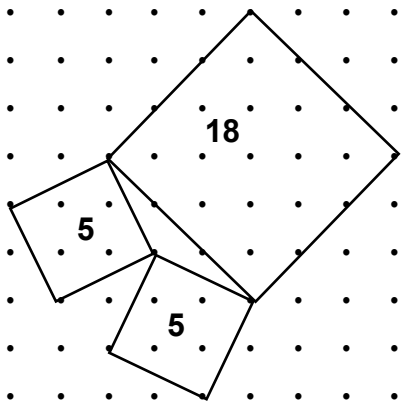


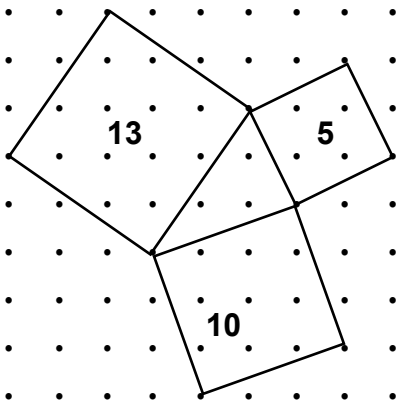
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Inverse del teorema de Pitágoras

Material adicional para los grupos que van más rápidos que los otros grupos de la clase.

Podemos usar el geotablilla para mostrar que si el ángulo opuesto al lado c is mayor que 90°, entonces $a^2 + b^2 < c^2$, y si el ángulo opuesto al lado c is menor que 90°, entonces $a^2 + b^2 > c^2$.





1) Construya un triángulo en el geotablilla que no tiene un ángulo recto.
2) Verifique que $a^2 + b^2 \neq c^2$

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividad 1

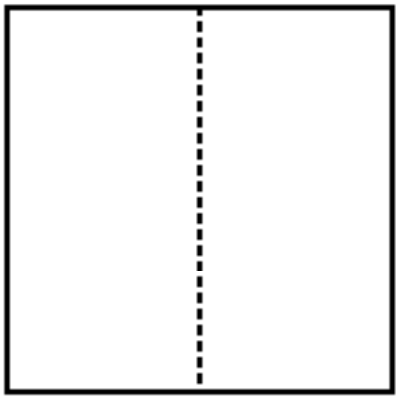


Figura 1a.
Cuadrado con la paralela media

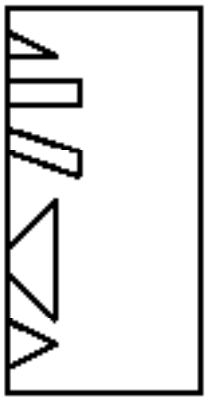


Figura 1b.
Cortes a lo largo del pliegue

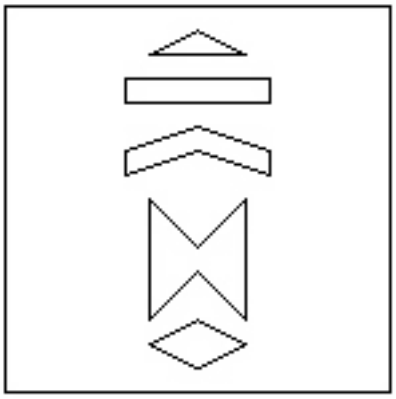


Figura 1c.
Un eje de simetría

Actividad 2

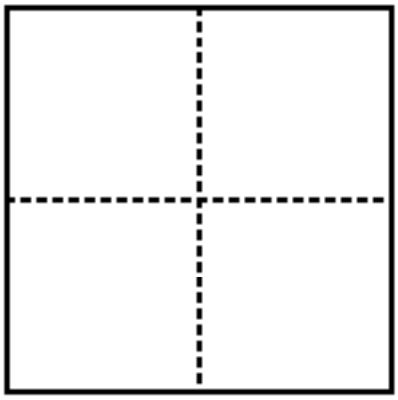


Figura 2a.
Cuadro dobaldo en 4 partes.

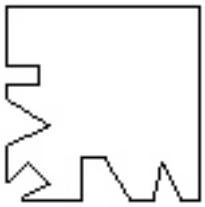


Figura 2b.
Cortes a lo largo del pliegue

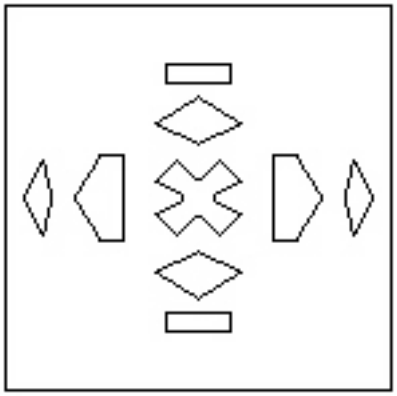


Figura 2c.
Dos ejes de simetría

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividad 3

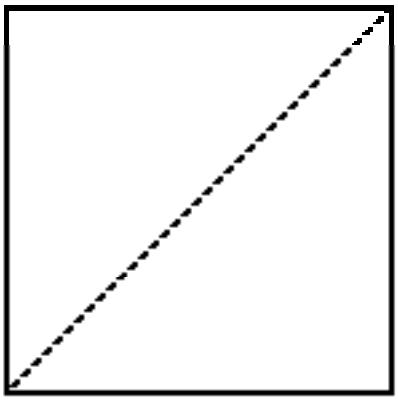


Figura 3a.
Cuadro doblado por la mitad en diagonal.

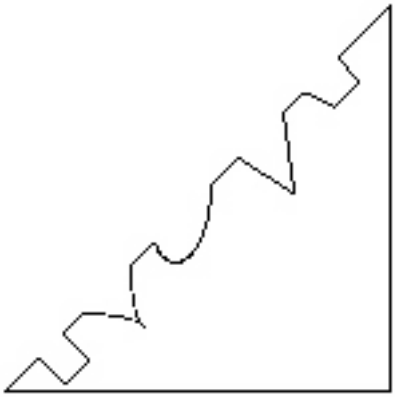


Figura 3b.
Cortes a lo largo del pliegue

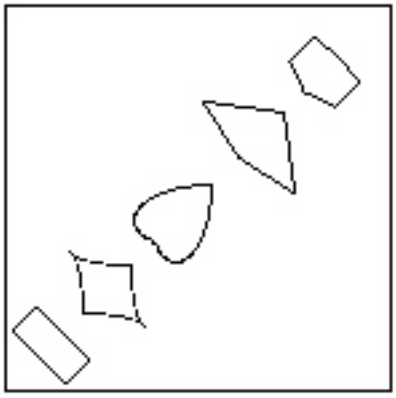


Figura 3c.
Un eje de simetría en diagonal

Actividad 4

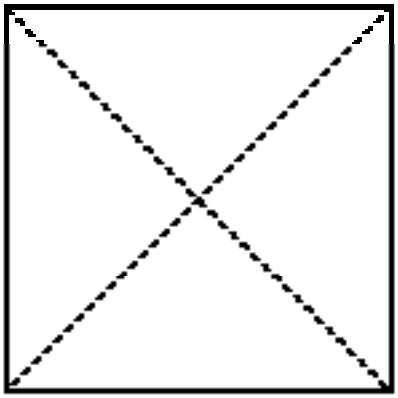


Figura 4a.
Cuadro doblado en 4 partes por las diagonales.

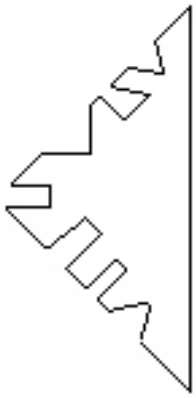


Figura 4b.
Cortes a lo largo del pliegue

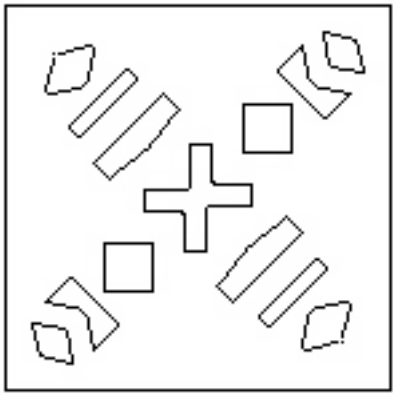


Figura 4c.
Dos ejes de simetría diagonales

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividad 5

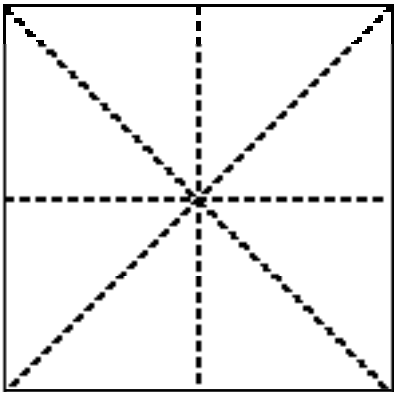


Figura 5a.
Cuadro doblado en 8 partes.

Figura 5b.
Cortes a lo largo del pliegue

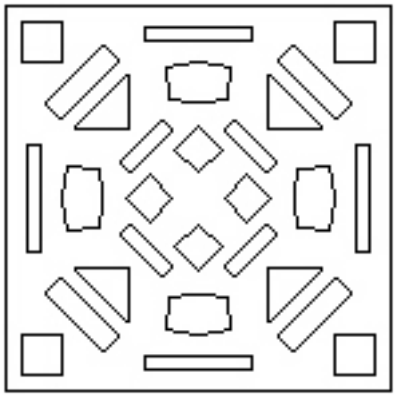


Figura 5c.
Cuatro ejes de simetría

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividades de papel picado

Materiales. Tijeras y cuadrados de papel (Papel de seda)

Actividad 1. Un eje de simetría.

Doble un cuadrado a la mitad para formar la paralela media (figura 1a). Con el cuadrado doblado, use las tijeras para recortar pequeños triángulos u otras figuras a lo largo del pliegue (figura 1b) y a lo largo de las orillas. Haga una predicción de cómo se verá el papel cuando lo abra (figura 1c).

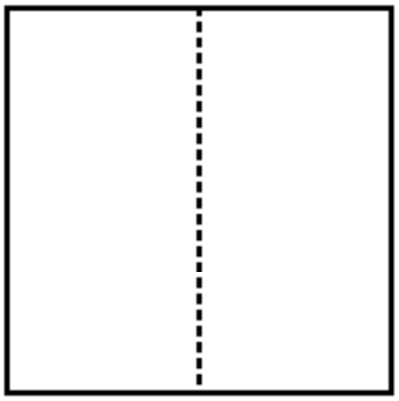


Fig. 1a. Cuadrado con la paralela media

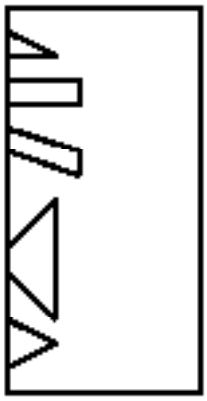


Fig. 1b. Cortes a lo largo del pliegue

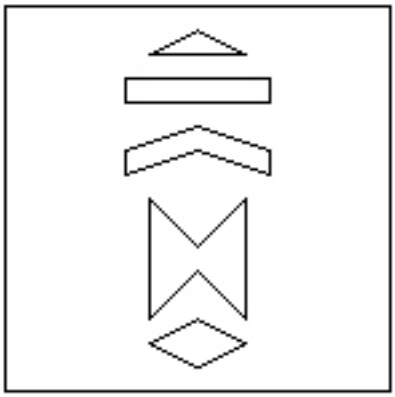


Fig. 1c. Un eje de simetría

Actividad 2. Dos ejes de simetría.

Doble un nuevo cuadrado a la mitad para formar una paralela media, y otra vez a la mitad, de modo que el segundo doblez sea perpendicular al primero (figure 2a). Con el cuadrado doblado en cuatro partes, use las tijeras para cortar pequeños triángulos u otras figuras a lo largo de los pliegues o los bordes (figure 2b). Haga una predicción de cómo se verá la hoja cuando la abra (figure 2c).

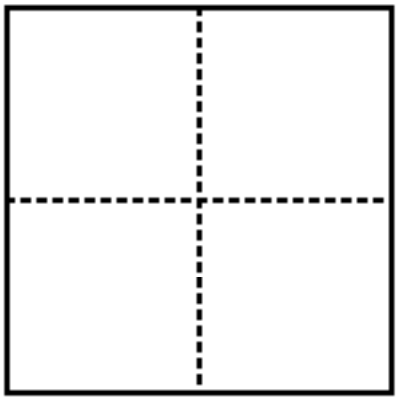


Fig. 2a. Cuadro doblado en 4 partes por diagonales.

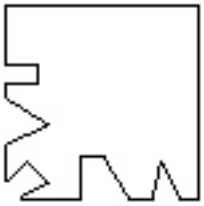


Fig. 2b. Cortes a lo largo del pliegue

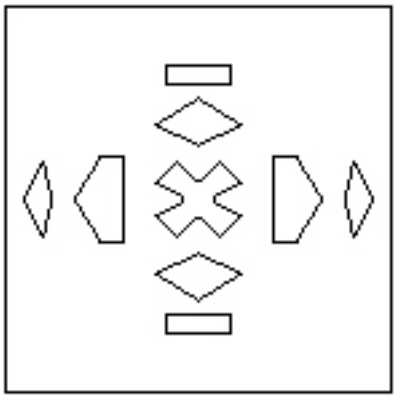


Fig. 2c. Dos ejes de simetría

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividades de papel picado

Actividad 3. Un eje de simetría en diagonal.

Doble un nuevo cuadrado a la mitad, esta vez a lo largo de la diagonal (figura 3a). Con el cuadrado doblado, use tijeras para cortar pequeños triángulos u otras formas a lo largo del pliegue y los bordes (figura 3b). Haga una predicción de cómo se verá la hoja cuando la abra (figura 3c).

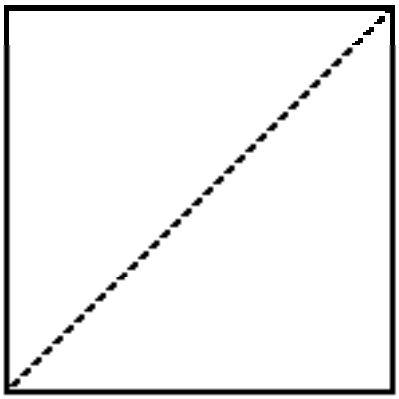


Fig. 3a. Cuadro doblado en medio por diagonal.

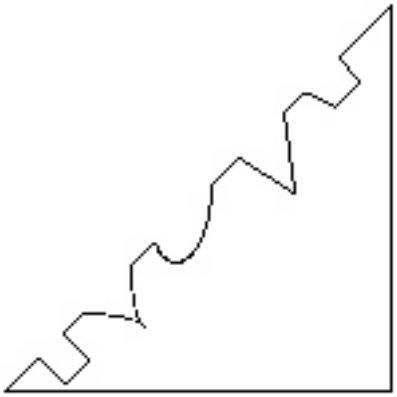


Fig. 3b. Cortes a lo largo del pliegue

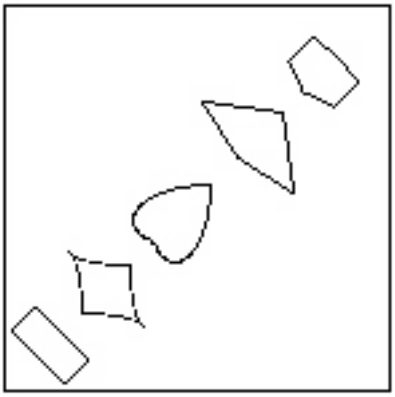


Fig. 3c. Un eje de simetría en diagonal

Actividad 4. Dos ejes de simetría diagonales.

Doble un nuevo cuadrado a lo largo de una diagonal para formar un triángulo. Luego doble el triángulo a lo largo de la otra diagonal (figura 4a). Con el cuadrado doblado así en cuatro partes, use las tijeras para recortar triángulos a lo largo de los pliegues y los bordes (figura 4b). Haga una predicción de cómo se verá la hoja cuando la abra (figura 4c).

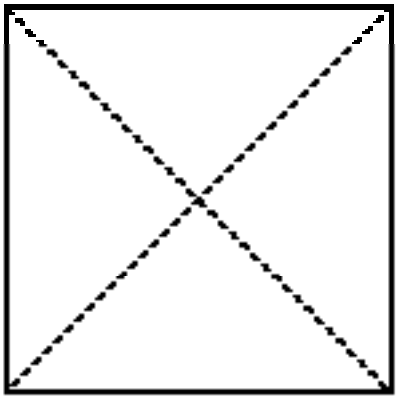


Fig. 4a. Cuadro doblado en 4 partes por las diagonales.

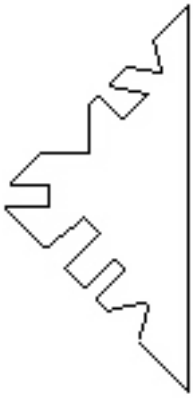


Fig. 4b. Cortes a lo largo del pliegue

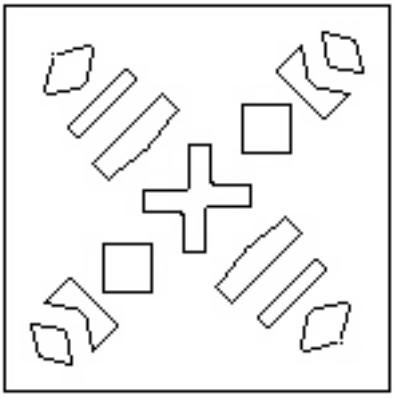


Fig. 4c. Dos ejes de simetría diagonales

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Actividades de papel picado

Actividad 5. Cuatro ejes de simetría.

Doble un cuadrado en cuatro haciendo primero un pliegue a lo largo de la paralela media y un segundo pliegue perpendicular. Ahora doble el cuadrado cuádruple a lo largo de la diagonal que pasa por el centro del cuadrado original. Esto es, cuando abra el cuadrado, los pliegues se deben ver como en la figure 5a. Cuando el cuadrado esté doblado, use tijeras para recortar triángulos u otras figuras a lo largo de los pliegues o los bordes (figure 5b). Haga una predicción de cómo se verá la hoja cuando la abra (figure 5c).

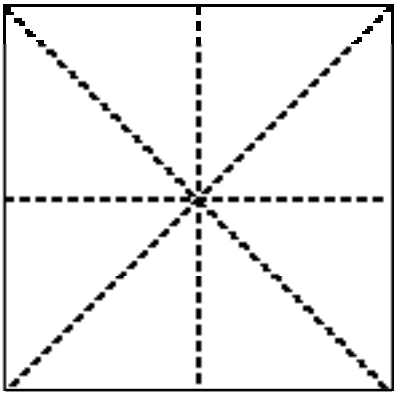


Fig. 5a. Cuadro doblado en 8 partes.

Fig. 5b. Cortes a lo largo del pliegue

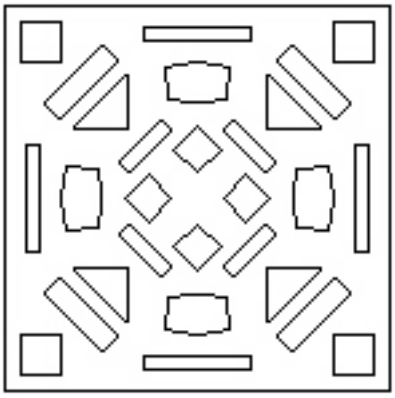


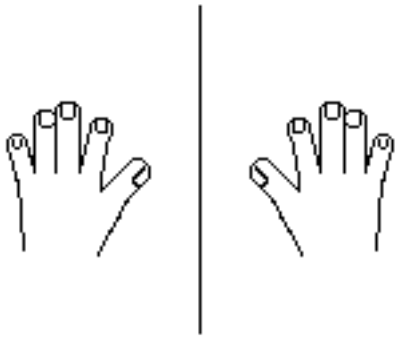
Fig. 5c. Cuatro ejes de simetría

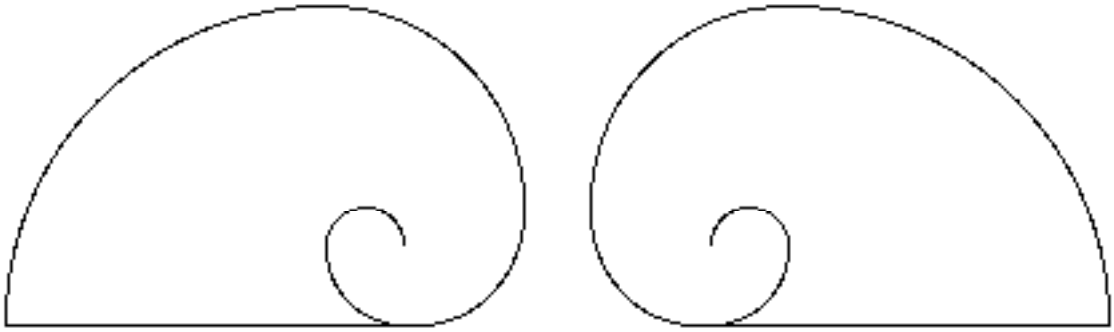
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Simetría y asimetría en la naturaleza

Actividad 1. Objetos asimétricos

Al reflejar un objeto en un espejo, obtenemos otro objeto que aunque sumamente parecido, por lo general no es igual al primero. La imagen de la mano derecha es la mano izquierda. El guante de la mano izquierda no queda bien en la derecha. Algunos objetos tienen una orientación hacia la derecha o hacia la izquierda, tales como tornillos, zapatos, guantes, algunas moléculas, algunas letras. La imagen en el espejo de un objeto derecho es un objeto izquierdo.





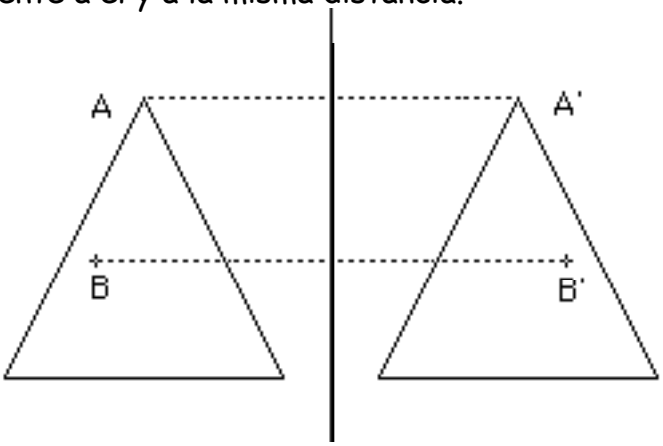
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Simetría y asimetría en la naturaleza

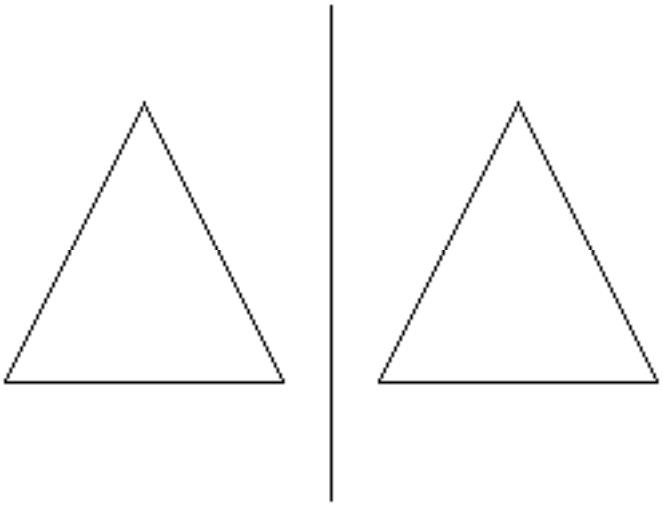
Actividad 2. Simetría en el espejo

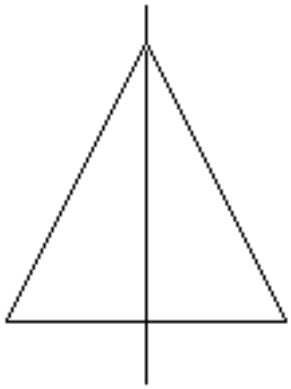
Objetos que son simétricos entyre si.

- La imagen simétrica se obtiene reflejando cada punto del otro lado del espejo, perpendicularmente a él y a la misma distancia.



- Hay objetos que sí se pueden superponer con su imagen en el espejo. Por ejemplo un triángulo isósceles es exactamente igual a su imagen en el espejo.





- En este caso los objetos tienen simetría bilateral. Una figura de dos dimensiones tiene simetría bilateral si tiene una línea que divide la figura en dos mitades que son imágenes en el espejo una de la otra.

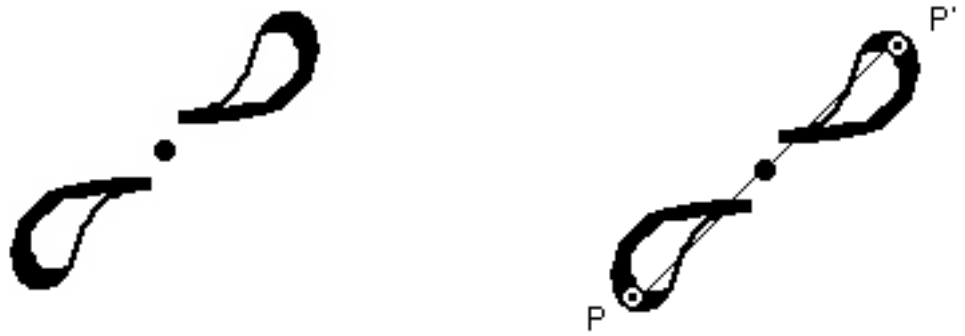
- Una figura de tres dimensiones tiene simetría bilateral si hay un plano que lo divida en dos mitades que sean imágenes en el espejo una de la otra.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Simetría y asimetría en la naturaleza

Actividad 3. Simetría puntual

Una reflexión a través de un punto fijo produce otro tipo de simetría. En este caso a cada punto de la figura le corresponde otro punto colocado simétricamente con respeto al punto fijo.



La simetría puntual también la podemos ver como una rotación de la figura de 180º alrededor del punto fijo.

Reflejar un objeto simétrico con respecto a su eje de simetría es una transformación que manda el objeto en sí mismo. Reflejar un objeto con simetría puntual con respecto al punto de reflexión es también una transformación que manda al objeto en sí mismo.

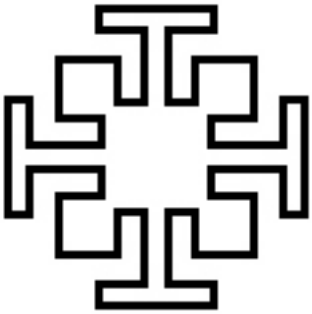
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Simetría y asimetría en la naturaleza

Actividad 4. Rotaciones

Hay también figuras donde el rotarlas 90º es también una transformación que manda el objeto en sí mismo. Por ejemplo, si rotamos un cuadrado 90º obtenemos el mismo cuadrado. De la misma manera una hélice de cuatro aspas, al rotarla 90º permanece invariante.

Se tienen también figuras que son invariantes ante una rotación de 90º y además tienen dos espejos perpendiculares entre sí.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Simetría y asimetría en la naturaleza

Actividad 5. Traslaciones

También hay otras transformaciones que mandan a algunos objetos en sí mismos. Un patrón que se repite, por ejemplo en un tapiz, en una pirámide, también puede mandarse en sí mismo, esta vez con una traslación.

- Existen siete tipos de patrones lineales, cada uno con un tipo de simetría. El patrón más simple es el que una misma figura asimétrica se repite indefinidamente.

- Otro patrón es en el que se repite una figura y su reflexión desplazada, como en el caso de las huellas de los pies en la arena.

- Algunos patrones tienen una simetría bilateral interna, en un eje vertical, como el siguiente ejemplo:

- Otros tienen la simetría en un eje horizontal, como en este caso:

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Simetría y asimetría en la naturaleza

Actividad 5. continuado

- En otros patrones, una serie de remolinos (simetría puntual) se repiten indefinidamente, como el siguiente.

- En el siguiente ejemplo, se tienen los remolinos reflejados alternadamente.

- Finalmente, el siguiente patrón tiene tanto un eje de simetría horizontal como uno vertical.

Referencias

Bosch Giral, Carlos; Flores Peñafiel, Alfinio. *Formas y transformaciones*. 5o Congreso Nacional de la Asociación Nacional de Profesores de Matematicas. Toluca, Mex. 1978.

Carroll, Lewis. *Through the looking glass*. Collins, 1978.

Carroll, Lewis. *Al otro lado del espejo*. México, Editorial Porrúa, 1972.

Carroll, Lewis. Las aventuras de Alicia en el país de las maravillas -- A través del espejo y lo que Alicia encontró allí. Madrid: Ediciones Generales Anaya, 1984.

Cook, T. A. *The curves of life*. Dover, 1979.

Coxeter, H. S. M. (Ed.) *M. C. Escher: art and science*. North Holland, 1986.

Crowe, Donald. *La simetría, rigid motions and patterns*. Comap, 1987.

Enciso, Jorge. *Design motifs of ancient Mexico*. Dover, 1953.

Enciso, Jorge. *Designs from pre-columbian Mexico*. Dover, 1971.

Flores Peñafiel, Alfinio. La simetría en la ciencia y en el arte. *Matemáticas*, *16*, (1989), p. 2-10.

Gardner, Martin. *The ambidextrous universe*. Basic Books, 1964. (En español: Izquierda y derecha en el cosmos. Salvat, 1972)

Gerdes, Paulus. *The geometry from Africa*. Mathematical Association of America, 1999.

Holden, Alan. *Shapes, space and La simetría*. Columbia University Press, 1971.

Locher, J. L. *The world of M. C. Escher*. Abrams, 1971.

Macgillavry, Caroline H. *Fantasy and La simetría: the periodic drawings of M. C. Escher*. Abrams, 1976.

Neville, A. C. *Animal aLa simetría*. Arnold, 1976.

Pauling, Linus. Hayward, Roger. *The architecture of molecules*. Freeman, 1964.

Pedoe, Dan. *Geometry and the liberal arts*. Penguin, 1976.

Stevens, Peter S. *Handbook of regular patterns*. MIT, 1982.

Stevens, Peter S. *Patterns in nature*. Little Brown, 1974.

Thompson, D'Arcy W. *On growth and form*. Cambridge University Pr., 1961.

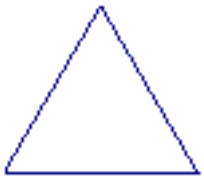
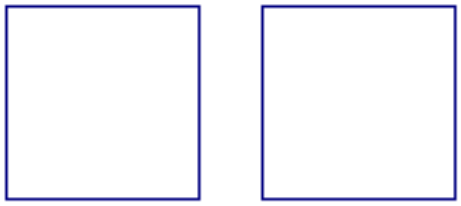
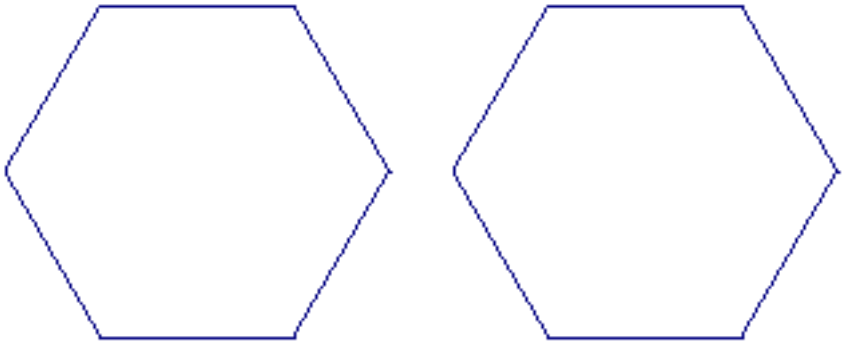
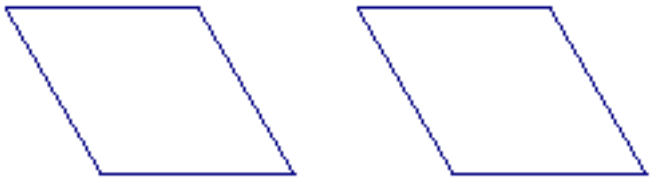
Weyl, Hermann. *La simetría*. Princeton, 1952. (Hay edición en español)

Zaslavsky, Claudia. *Africa counts*. Prindle, Weber & Schmidt, 1973.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Explorando simetrías con bloques de patrones

Actividad 1. Determine cuáles de los bloques de patrones tienen simetría bilateral. Use un Mira para verificar que la figura es en efecto simétrica. Si una pieza particular tiene más de una clase de eje de simetría también anótelo. Trace los ejes de simetría.

Figura	Ejes de simetria
Triángulo equilatero	
Cuadrado	
Hexágono	
Trapecio	
Rombo azúl	
Rombo amarillento	

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Explorando simetrías con bloques de patrones

Actividad 2. Combine varios bloques para diseñar una figura que tenga simetría bilateral. Use un Mira si es necesario para verificar que su diseño es en efecto simétrico.

Actividad 3. Construya un diseño que tenga simetría puntual. Identifique el centro de simetría. Trace su diseño en papel. Trace líneas a través del centro de simetría para identificar puntos en el diseño que sean simétricos con respecto al centro de simetría.

Actividad 4. Construya un diseño con bloques que tenga simetría puntual pero no tenga simetría bilateral.

Actividad 5. Construya un diseño con bloques que tenga tanto simetría puntual como simetría bilateral.

Actividad 6. Verifique mediante una rotación que una figura con simetría puntual también tiene una simetría rotacional de 180° alrededor del centro de simetría.

Actividad 7. Verifique con varias figuras que las siguientes condiciones son equivalentes. Es decir una figura que satisface la condición a) también satisface la condición b) y viceversa.

a) Una figura tiene simetría puntual y un eje de simetría bilateral.
b) Una figura tiene dos ejes perpendiculares de simetría bilateral.

Actividad 8. Identifique cuáles de los bloques tienen simetría puntual.

Actividad 9. Verifique que el cuadrado tiene simetría rotacional de 90° con respeto a su centro.

Actividad 10. Construya un diseño que tenga simetría rotacional de 90°. Identifique el centro de rotación.

Actividad 11. Construya un diseño con bloques que tenga simetría de rotación de 90° pero que no tenga simetría bilateral.

Actividad 12. Construya un diseño con bloques que tenga tango simetría de rotación de 90° así como simetría bilateral. Identifique todos los ejes de simetría de su diseño.

Actividad 13. *¿Cuáles son las simetrías de rotación del triángulo equilátero?*

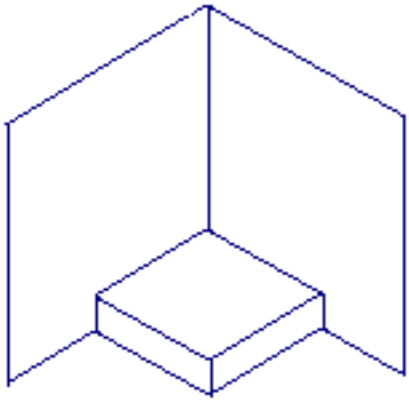
Actividad 14. Identifique las simetrías de rotación del hexágono regular.

Actividad 15. *¿Qué otros bloques tienen simetría rotacional de cualquier tipo?*

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Espejos embisagrados y bloques de patrones

1. Coloque un cuadrado entre dos espejos unidos por una bisagra de modo que formen un ángulo de 90°. *¿Cuántos cuadrados ve?* (Incluyendo el original.)



Bloque cuadrado entre dos espejos unidos.
No se muestran las reflexiones

2. Coloque un triángulo entre dos espejos unidos de modo que formen un ángulo de 60°.
   ¿Cuántos triánglos ve?
3. Coloque un hexágono entre dos espejos unidos de modo que formen un ángulo de 120°.
   ¿Cuántos hexágonos ve?
4. Coloque el rombo amarillento entre dos espejos unidos de modo que formen un ángulo de 30°.
   ¿Cuántos rombos puede ver?
5. Llene la tabla siguiente.

Figura	Ángulo entre los espejos	Número de figuras
Rombo amarillento		
Triángulo equilátero		
Cuadrado		
Hexágono regular		

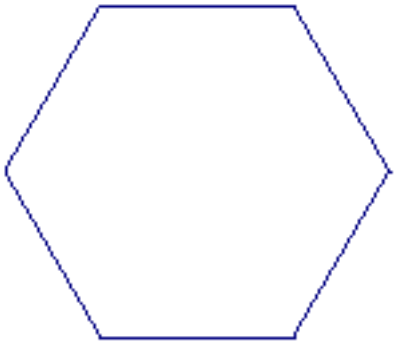
   ¿Qué nota acerca de los valores en la tabla?
6. Coloque los otros bloques entre los espejos en diferentes posiciones. Por ejemplo, coloque el rombo azúl para formar primero un ángulo de 60° entre los espejos y luego para formar un ángulo de 120°.
   ¿Es el número de figuras reflejadas consistente con la tabla de arriba?
7. Exprese la relación entre el tamaño del ángulo y el número de figuras con una ecuación.
8. Ahora coloque el rombo amarillento entre los dos espejos y abra el ángulo de modo que vea exactamente cinco rombos (incluyendo el original).
   ¿Cuál es el ángulo formado por los espejos?

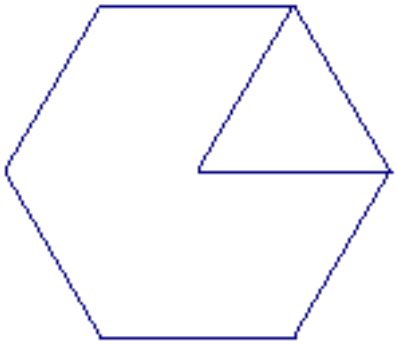
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Calidoscopios simples

Actividad 1. Hexágono

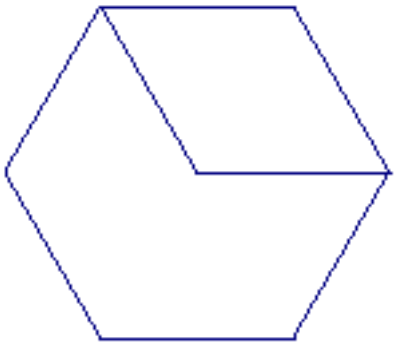
Trace todas las líneas de simetría del hexágono.

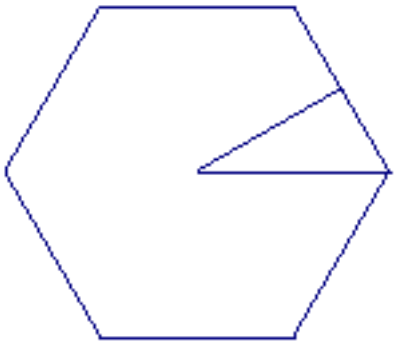




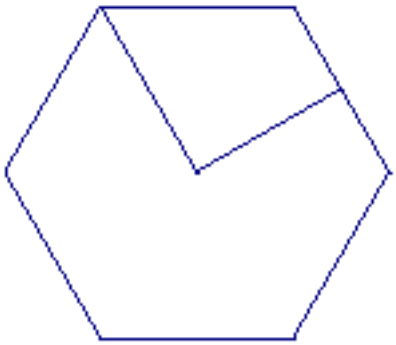
a) Coloque dos espejos unidos a lo largo de dos líneas de simetría con la unión de los espejos en el centro del hexágono. Si mira entre los espejos, debe ver un hexágono completo. Coloque algunos objetos pequeños entre los espejos. Si los mira, verá un patrón que es calidoscópico.

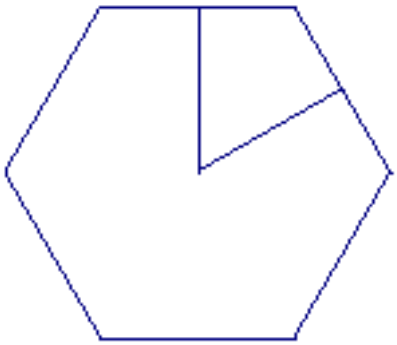
b) Coloque los espejos unidos a lo largo de las líneas indicadas.





c) Vea si puede reconstruir todo el hexágono colocando los espejos unidos a lo largo de las líneas indicadas.





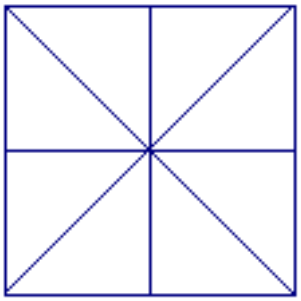
d) *¿Qué puede decir acerca de los ángulos con los que puede reconstruir todo el hexágono con los espejos unidos?*

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

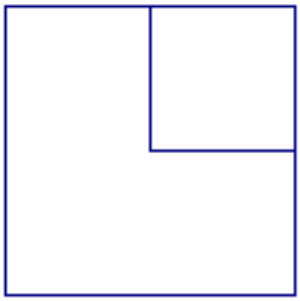
Calidoscopios simples

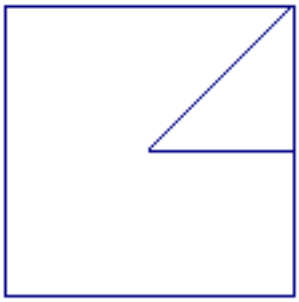
Actividad 2. Cuadrado.

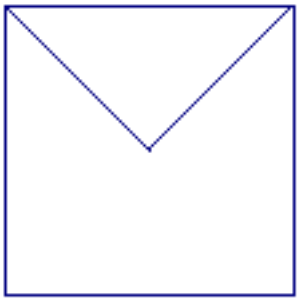
Trace un cuadrado con todas sus líneas de simetría.



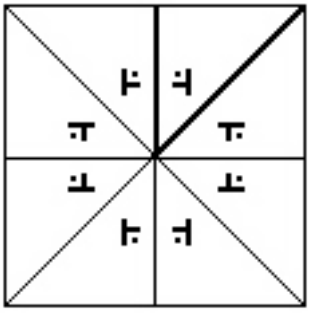
a) Coloque los espejos a lo largo de dos líneas de simetría, con la unión de los espejos en el centro de la figura. Si mira entre los espejos debe ver el cuadrado completo.







b) *¿Qué puede decir de los ángulos con los que puede formar el cuadrado completo?*



c) Coloque algunos objetos pequeños entre los espejos. Si mira entre los espejos verá un patrón que es calidoscópico.

Explique cómo se forma la imagen calidoscópica.

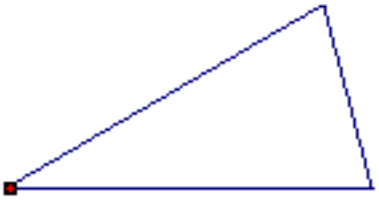
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Calidoscopios simples

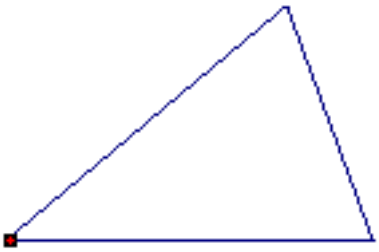
Actividad 3

Coloque espejos a lo largo de las líneas que se juntan en el vértice marcado del triángulo. *¿Cuáles ángulos producen un polígono regular?* Puede también probar con sus propios ángulos. Exprese con sus propias palabras qué condición satisfacen los ángulos que generan polígonos regulares.

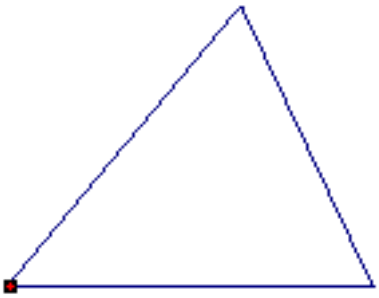
25°



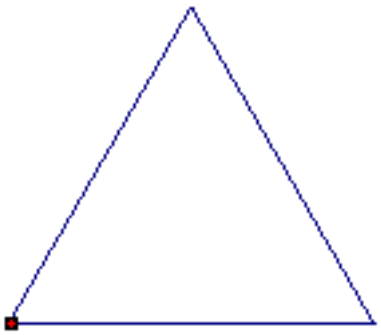
30°



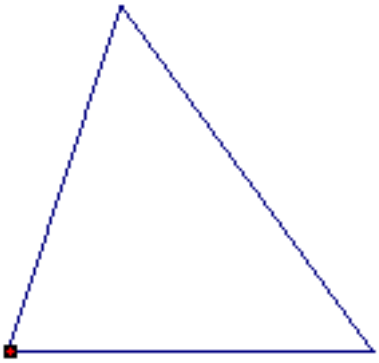
40°



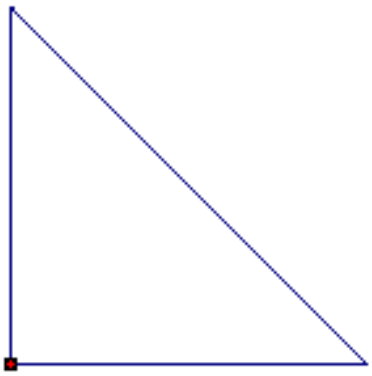
50°



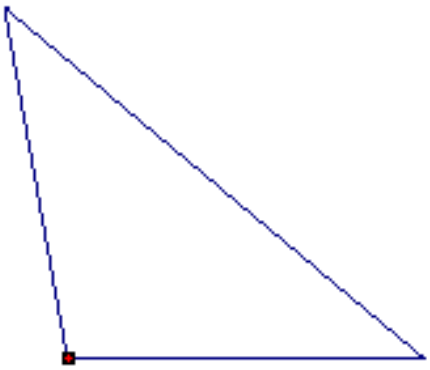
60°



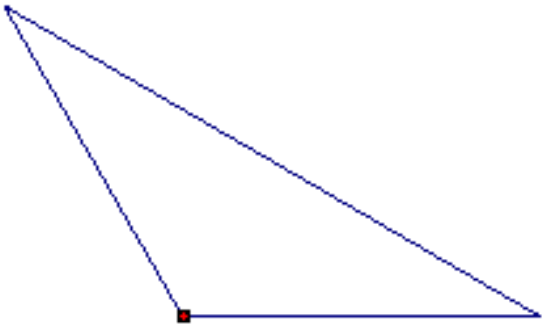
72°



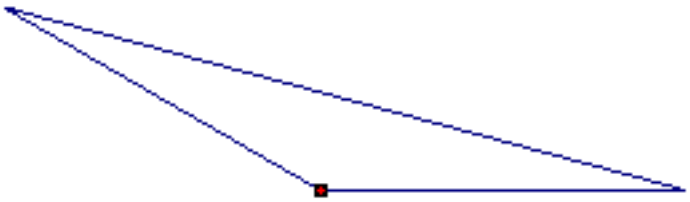
90°



100°



120°

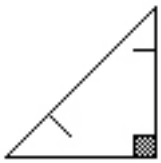


150°

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Calidoscopio de tres espejos

1. El calidoscopio de dos espejos genera patrones finitos con las simetrías de los polígonos regulares.
2. También hay calidoscopios cuyos patrones parecen extenderse infinitamente. Se usan tres espejos que forman un prisma.
   - Use tres espejos para formar un prisma cuya base sea un triángulo equilátero.
   - Coloque patrones coloreados en la base del calidoscopio.
   - *¿Pueden generarse adoquinados regulares colocando patrones en un calidoscopio equilátero de tres espejos? Si es así, muestre los patrones.*
   - *¿Cuántos adoquinados semiregulares se pueden generar colocando patrones en un calidoscopio equilátero de tres espejos? Muestre los patrones.*
3. También se pueden obtener calidoscopios que producen patrones infinitos con triángulos distintos del equilátero.
   - Los ángulos para uno de estos calidoscopios son 30°, 60°, 90°. Para el otro los ángulos son 90°, 45°, 45°.
   - El adoquinado en la figura 1 fue generado colocando el patrón indicado en la base del calidoscopio con ángulos 90°, 45°, 45°.



patrón básico

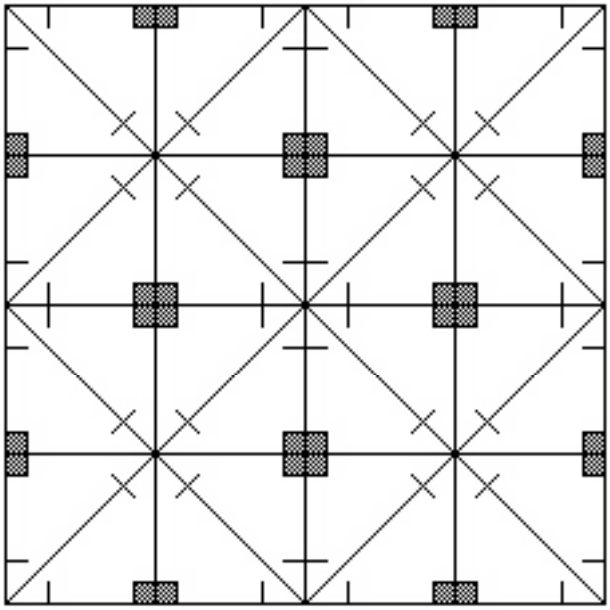


Figura 1

4. Cada uno de los patrones en la figura 2, cuando se coloca en la base de un calidoscopio de tres espejos con ángulos de 90-45-45, genera un adoquinado.

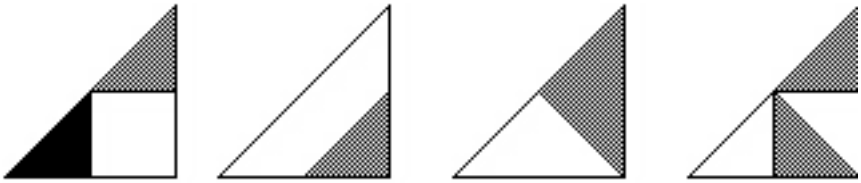


Figura 2

Para cada patrón adivine cómo se verá cada adoquinado. Verifique si adivinó con un calidoscopio.

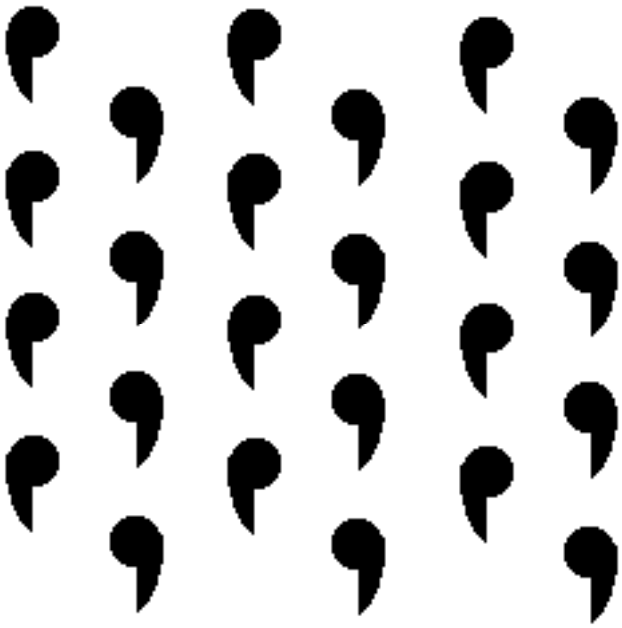
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Simetrías en el plano

Materiales suplementarios para grupos que avanzan más rápido que otros en la clase.

En el plano los patrones se pueden agrupar en 17 grupos de simetrías. El patrón más sencillo es el que consiste en dos tr

Otro patrón muy común es el que consiste en dos reflexiones paralelas desplazadas.

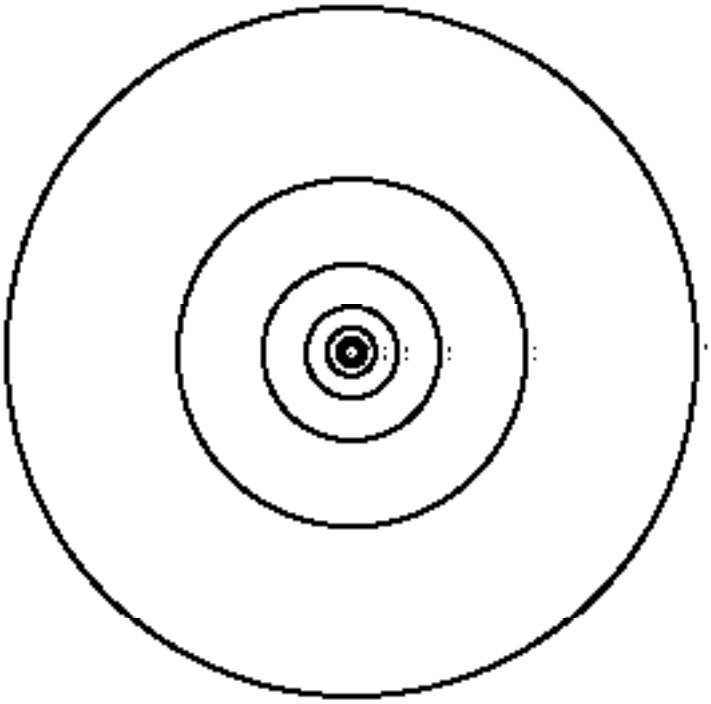


Los dibujos árabes y los de Escher ilustran y exploran estos patrones y es común encontrar en las diversas culturas que trabajan con este tipo de dibujo geométrico que los diseños utilizados abarcan los 17 grupos.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

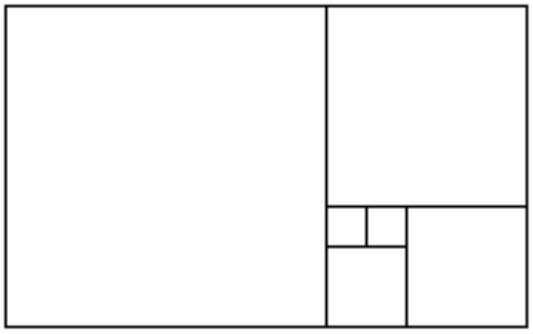
Semejanza

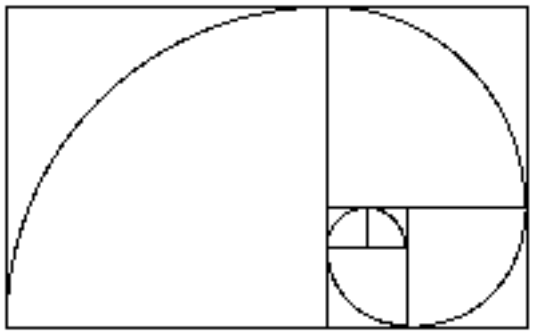
No son únicamente las transformaciones rígidas las que transforman un objeto en sí mismo.



Por ejemplo, un conjunto de círculos concéntricos, cada uno con un radio del doble del anterior, puede ser transformado en sí mismo por medio de una dilatación o una contracción con un factor 2.

Podemos combinar distintos tipos de estas transformaciones, por ejemplo en el caracol, una cámara se puede transformar en otra por medio de una dilatación y una rotación. Esto permite al organismo crecer manteniendo la forma de la cámara igual.





Una espiral queda invariante si combinamos adecuadamente una rotación, con una dilatación.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

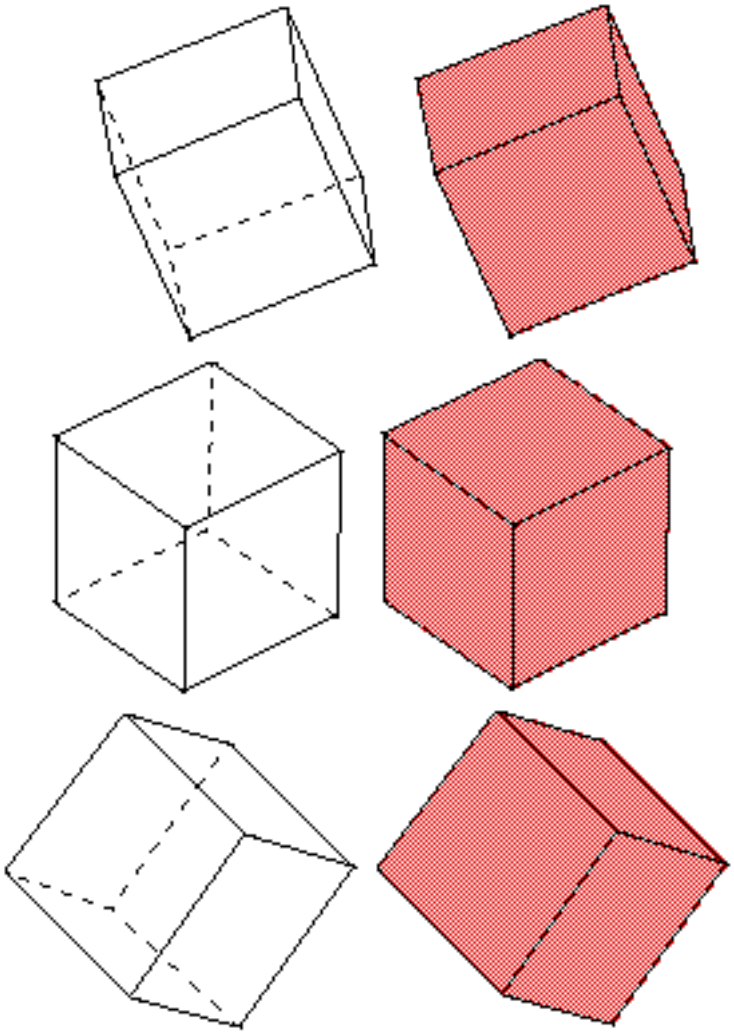
Poliedros regulares

Descripción y definición de poliedros regulares

Los poliedros regulares se caracterizan por dos propiedades:
1) Sus caras son polígonos regulares convexos congruentes.
2) El mismo número de polígonos se juntan en cada vértice.

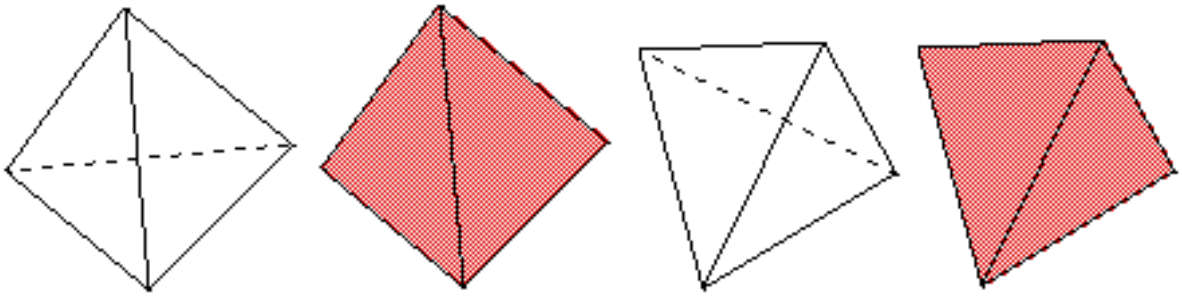
Cubo

El más conocido de los poliedros regulares es el cubo. Tiene 6 caras cuadradas, 12 aristas, y 8 vértices. En el cubo, tres aristas se juntan en cada vértice.



Tetraedro

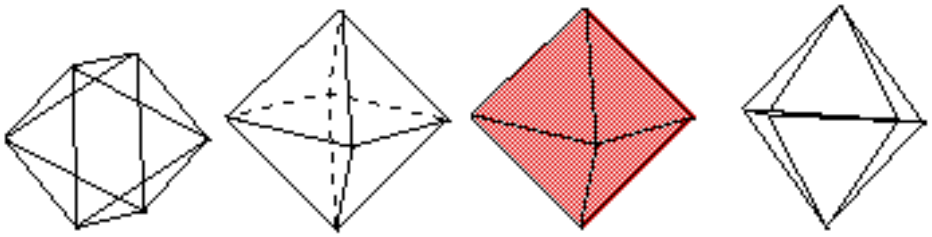
El tetraedro es el más sencillo de los poliedros regulares. Tiene 4 caras triangulares, 6 aristas, y 4 vértices. En el tetraedro, tres aristas se juntan en cada vértice.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

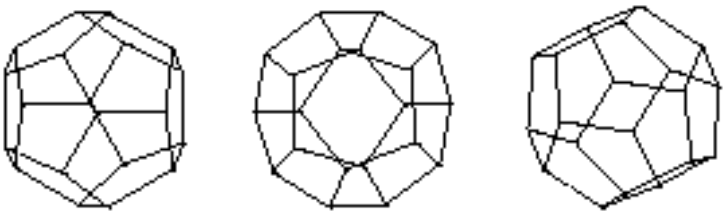
Poliedros regulares

Octaedro
El octaedro tiene 8 caras triangulares, 12 aristas, y 6 vértices. En el octaedro se juntan 4 aristas en cada vértice.



Icosaedro
El icosaedro tiene 20 caras triangulares, 30 aristas, y 12 vértices. En el icosaedro se juntan 5 aristas en cada vértice.

Dodecaedro
El dodecaedro tiene 12 caras pentagonales, 30 aristas, y 20 vértices. En el dodecaedro se juntan 3 aristas en cada vértice.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Construcción de los poliedros regulares

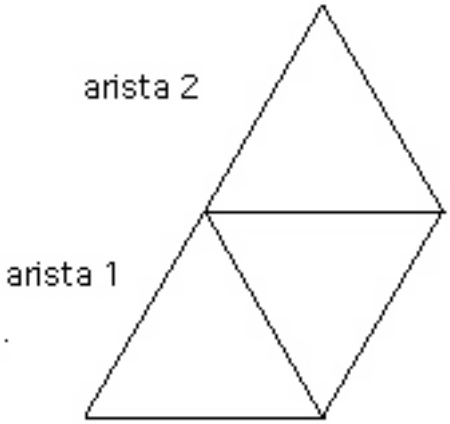
Hay juegos de poliedros para armar que se pueden comprar que permiten la construcción fácil de los poliedros. Algunos de estos son Polydron, Polydron frames, o juegos de cartón. Los poliedros se pueden también construir de papel usando los planos al final de esta sección.

Actividad 1. El cubo

Una tres cuadrados Polydron de modo que tengan un vértice en común. Ahora una la arista 1 con la arista 2. Complete el cubo con tres cuadrados más.

Actividad 2. El tetraedro

Una tres triángulos de Polydron de modo que tengan un vértice en común. Ahora una la arista 1 con la arista 2. Complete el tetraedro con un triángulo más.

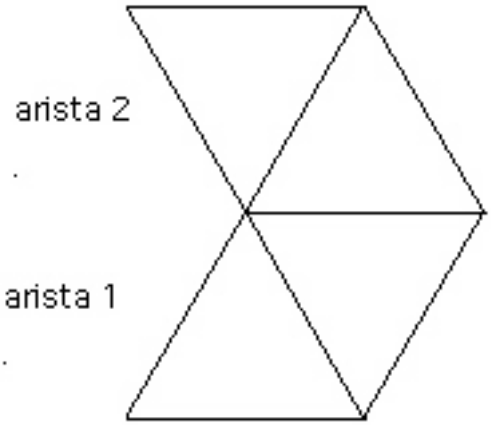


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Construcción de los poliedros regulares

Actividad 3. El octaedro

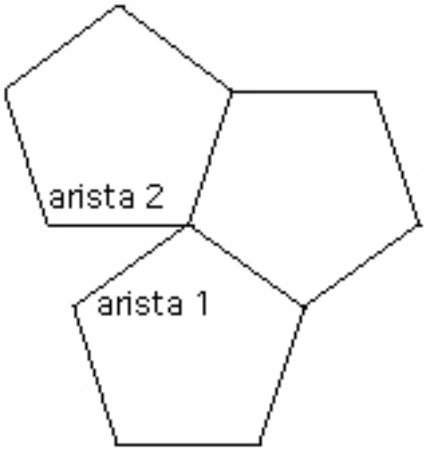
Una cuatro triángulos Polydron de modo que tengan un vértice en común. Una la arista 1 con la arista 2. Complete el octaedro añadiendo cuatro triángulos más del otro lado de modo que en cada vértice tenga cuatro triángulos.



Actividad 4. El dodecaedro

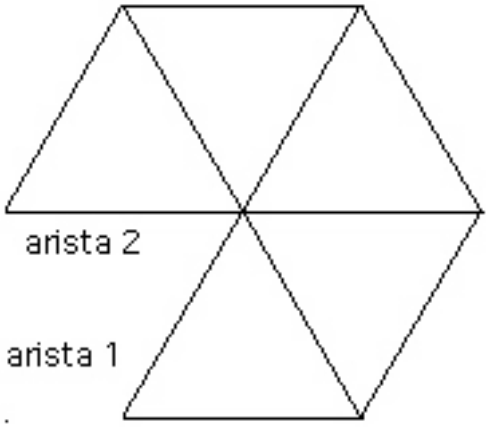
Una tres pentágonos Polydron de modo que tengan un vértice en común.

Ahora una la arista 1 con la arista 2. Va a necesitar 9 pentágonos más para terminar el dodecaedro. Tres pentágonos se juntan en cada vértice.



Actividad 5. El icosaedro

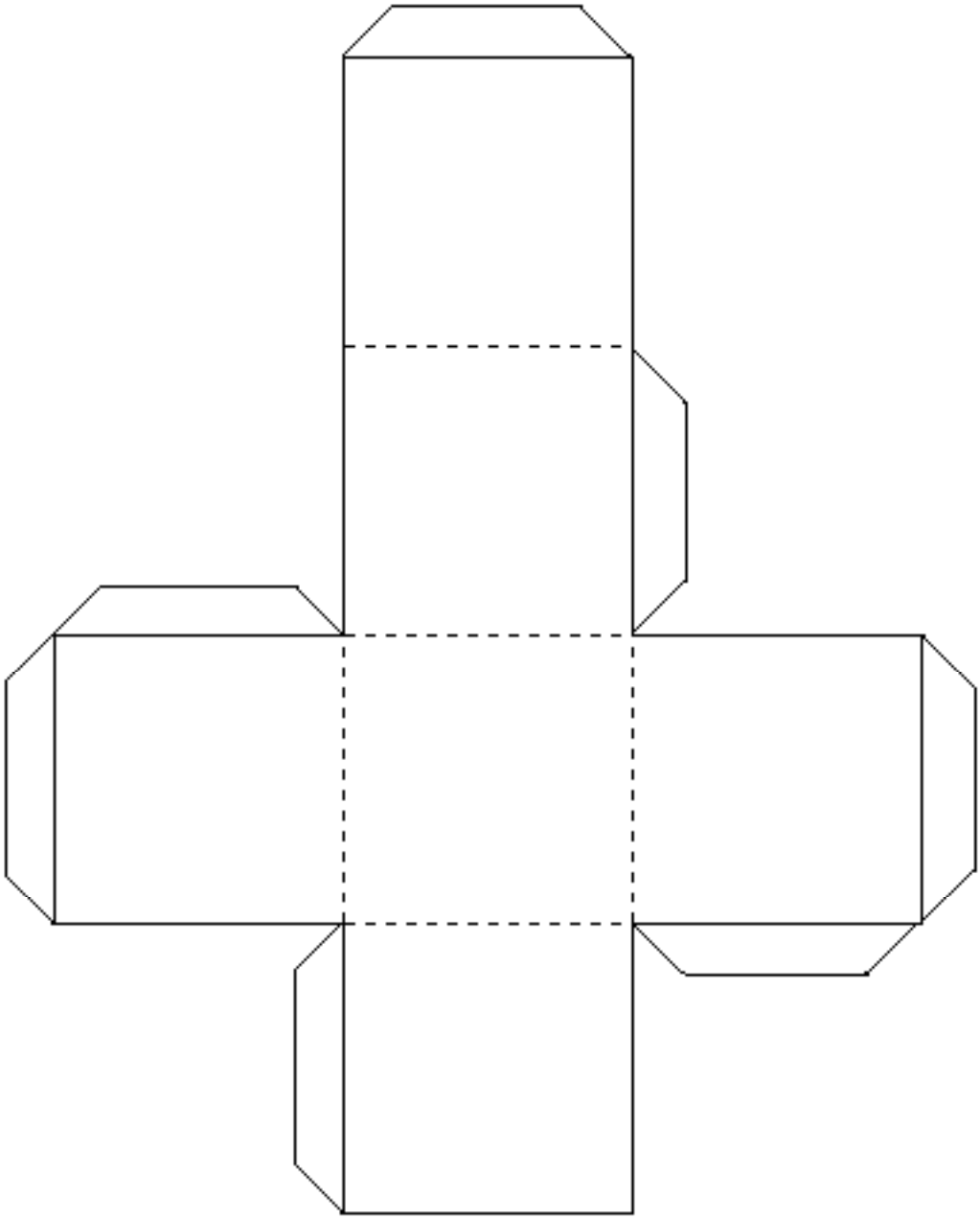
Una cinco triángulos Polydron de modo que tengan un vértice en común. Ahora una la arista 1 con la arista 2. Para terminar el icosaedro va a necesitar otra "tapa" como ésta y 10 triángulos más que formen un "cinturón" entre las tapas. El icosaedro tiene 20 caras triangulares y se juntan 5 triángulos en cada vértice.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Planos para poliedros

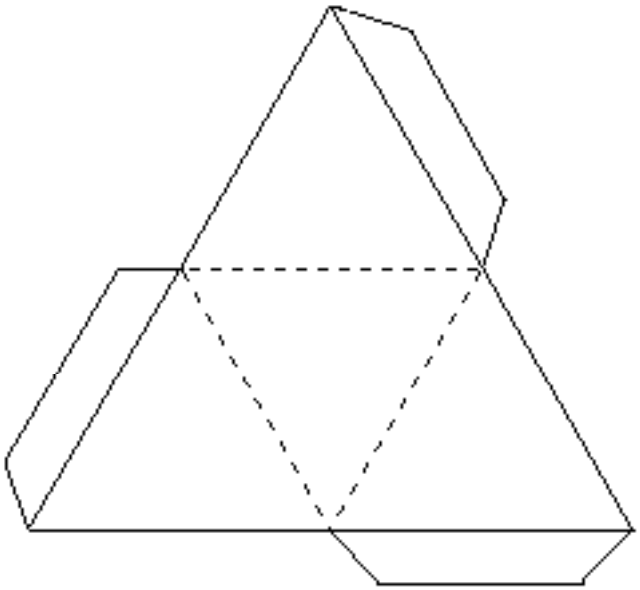
Plano para el cubo



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Planos para poliedros

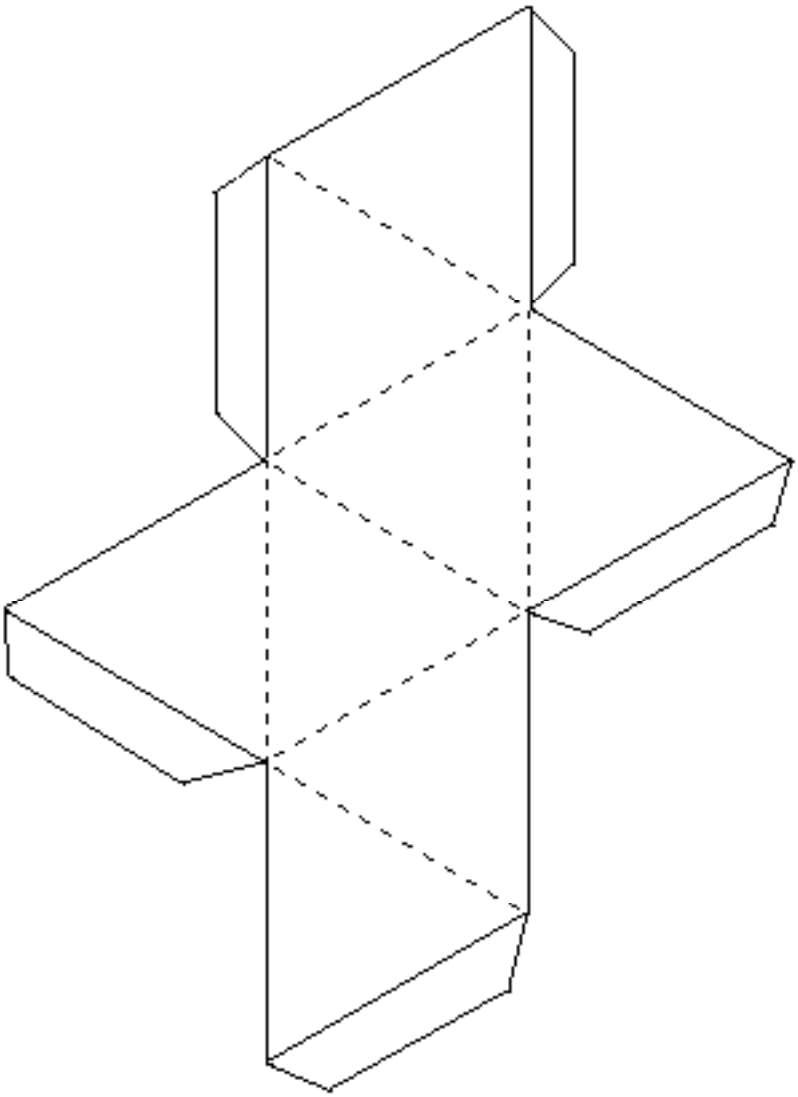
Plano para el tetraedro



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Planos para poliedros

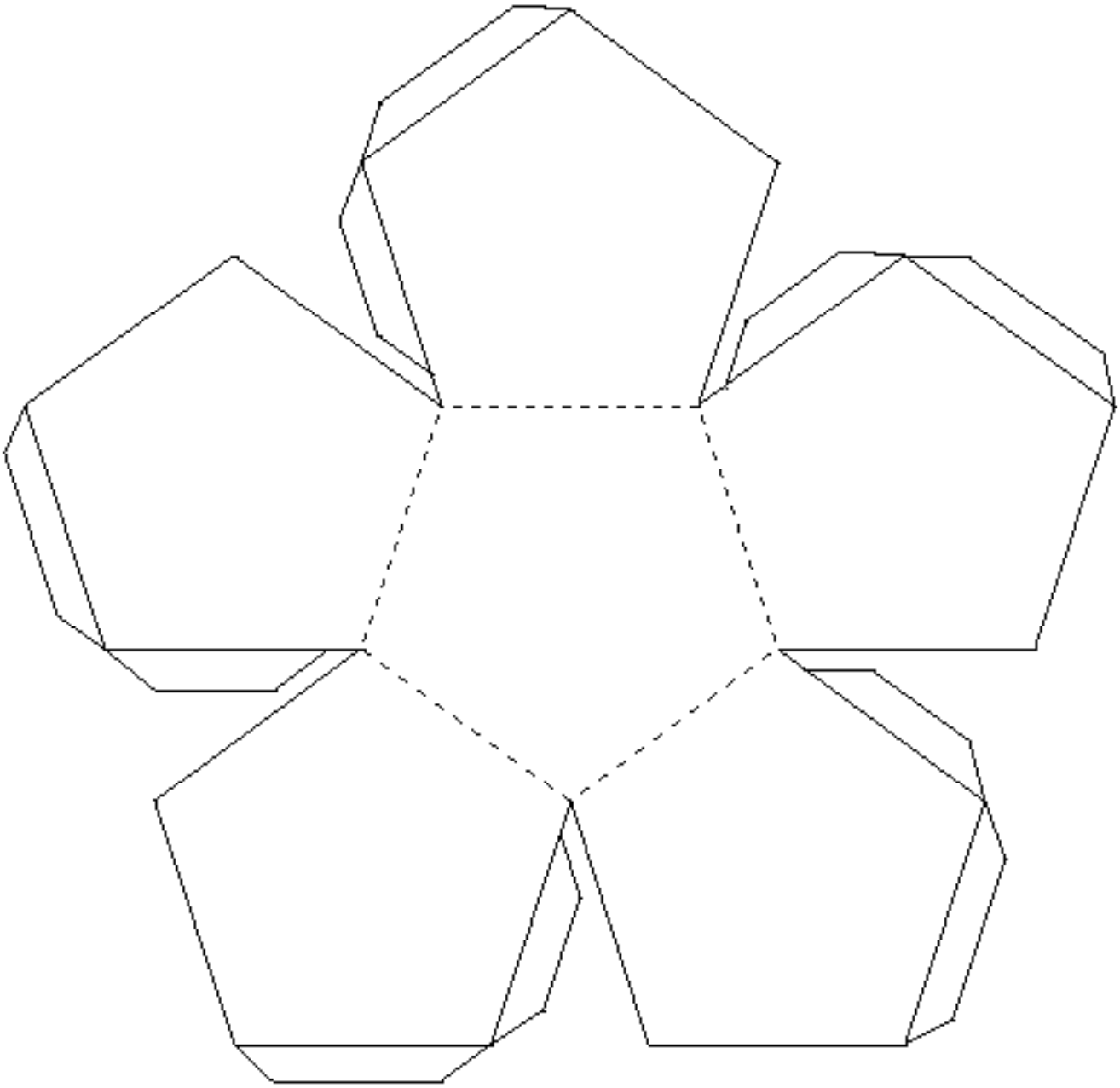
Plano para el octaedro



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Planos para poliedros

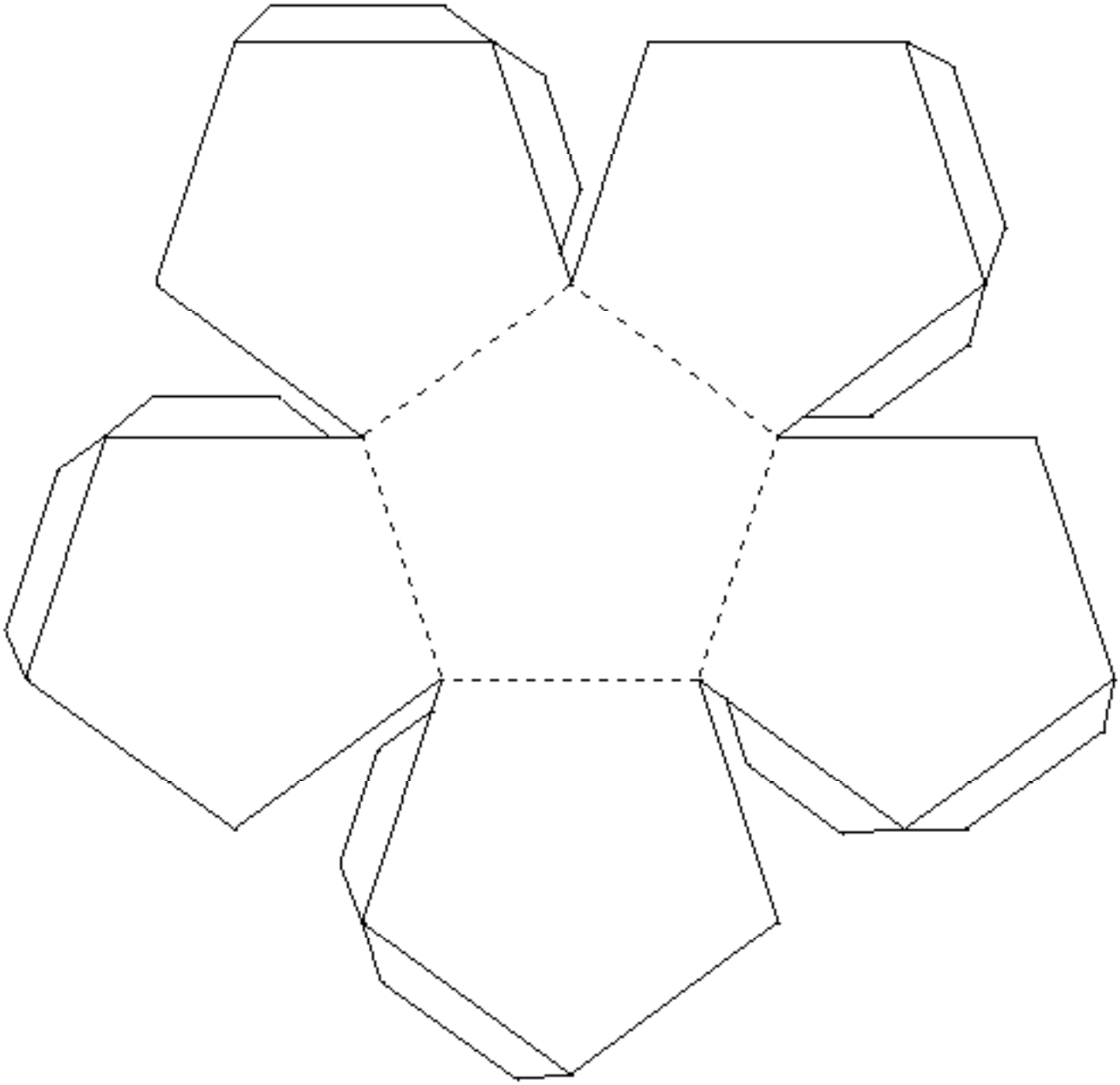
Plano para el dodecaedro - Parte uno



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Planos para poliedros

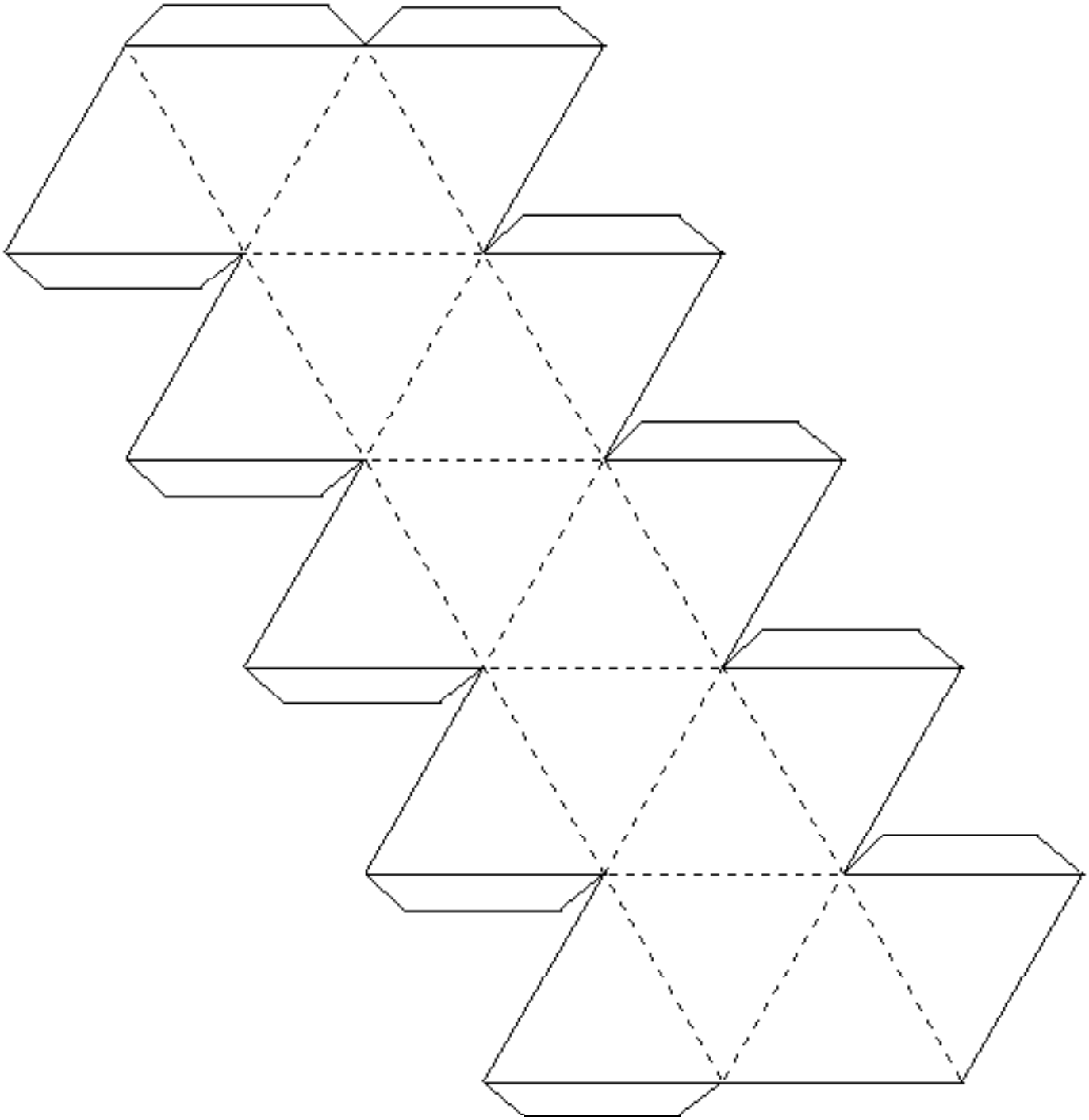
Plano para el dodecaedro - Parte dos



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Planos para poliedros

Plano para el icosaedro



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Solamente cinco poliedros regulares

Actividad 1. Contando caras, orillas, y vertices de poliedros regulares

¿Por qué sólo hay cinco poliedros regulares?
Se necesitan al menos tres polígonos para crear un vértice poliédrico, y el número que se pueden acomodar en cada vértice depende del ángulo de los polígonos. La suma de los ángulos de los polígonos en cada vértice debe ser menor que 360º, ya que si fuera igual a 360º se tendría una figura plana, y si fuera mayor no se podría doblar un poliedro convexo.

- Si usamos triángulos equiláteros tenemos tres posibilidades: 3 triángulos, 4 triángulos ó 5 triángulos en un vértice (seis triángulos forman una configuración plana).
- Si usamos cuadrados tenemos 3 cuadrados en un vértice (4 cuadrados forman una configuración plana).
- Si usamos pentágonos regulares, sólo podemos tener tres pentágonos en cada vértice (la suma de los ángulos de 4 pentágonos es 4 x 108º, lo cual es mayor que 360º).
- No podemos usar 3 hexágonos, ya que forman una configuración plana.
- La suma de tres ángulos de un heptágono regular, o de cualquier polígono con más de 6 lados es mayor que 360º.
- De esta manera vemos que las únicas posibilidades son 3 triángulos, 4 triángulos ó 5 triángulos que se juntan en cada vértice (tetraedro, octaedro, icosaedro); 3 cuadrados en cada vértice (cubo); 3 pentágonos regulares en cada vértice (dodecaedro).

Cómo contar las aristas de un poliedro regular.
Las aristas se pueden contar de manera sistemática de varias formas. Una es la siguiente:

El icosaedro tiene 20 caras triangulares, esto es, por cada cara hay tres aristas, pero cada arista es compartida por dos caras, de modo que el número de aristas es 20 x 3 / 2 = 30

El dodecaedro tiene 12 caras pentagonales, cada cara tiene 5 aristas, pero cada arista es compartida por dos caras. El número de aristas es 12 x 5 / 2 = 30.

Complete la siguiente tabla.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Solamente cinco poliedros regulares

Actividad 2. Formula de Euler's para Poliedro

Tabla para contar un poliedro normal

	Número de caras	Número de vértices	Número de aristas	
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Actividades adicionales:

- Se proporcionan redes para cinco poliedros regulares.
- Recórtelas, dóblelas y péguelas para formar los modelos.
- Diseñe otra red para el tetraedro.

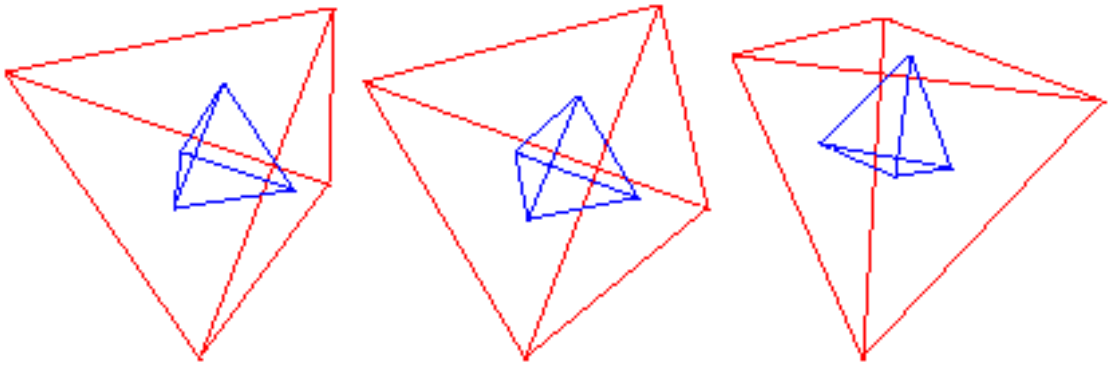
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Solamente cinco poliedros regulares

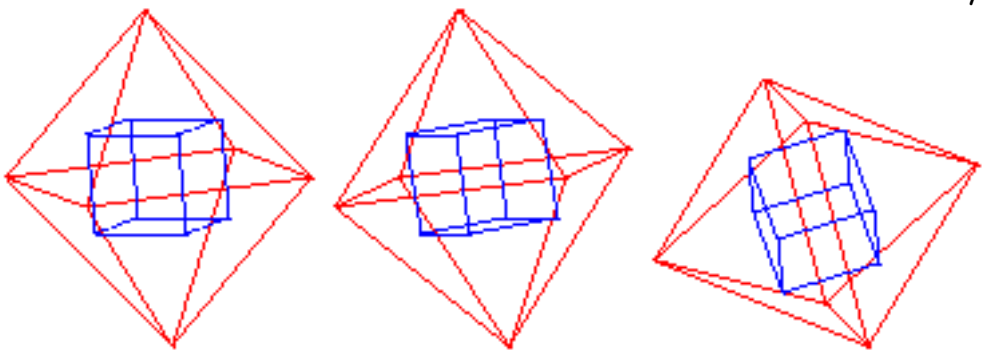
Actividad 3. Dualidad

Los poliedros duales tienen una relación especial. El número de vértices en uno es precisamente el número de caras en el otro, y viceversa. Los poliedros duales tienen el mismo número de aristas. Los poliedros duales pueden ser inscritos uno dentro del otro. Los puntos medios de las caras de un poliedro serán los vértices del poliedro dual inscrito.

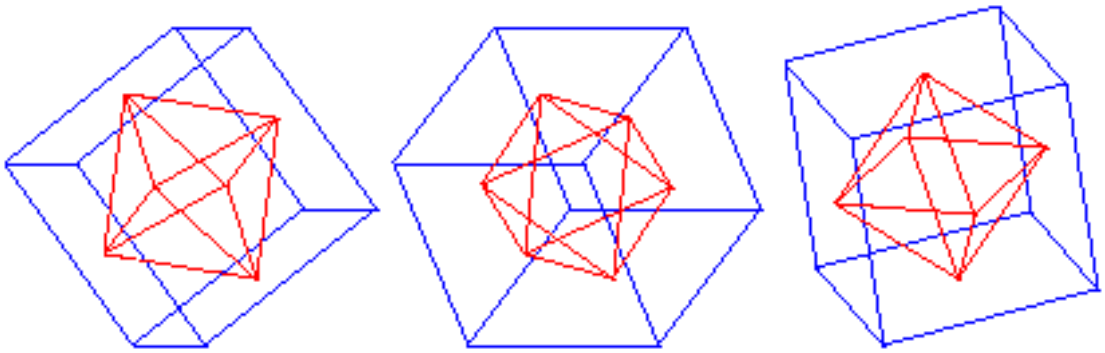
Si conectamos los puntos medios de las caras de un tetraedro se forma otro tetraedro. Esto es, el tetraedro es su propio dual.



Se puede inscribir un cubo dentro de un octaedro conectando los centros de caras adyacentes.



También podemos inscribir un octaedro dentro de un cubo conectando los centros de caras adyacentes.

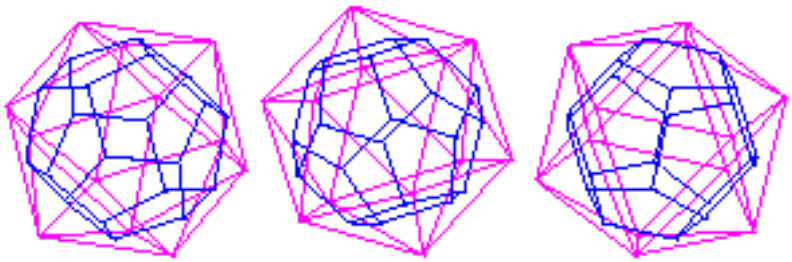


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

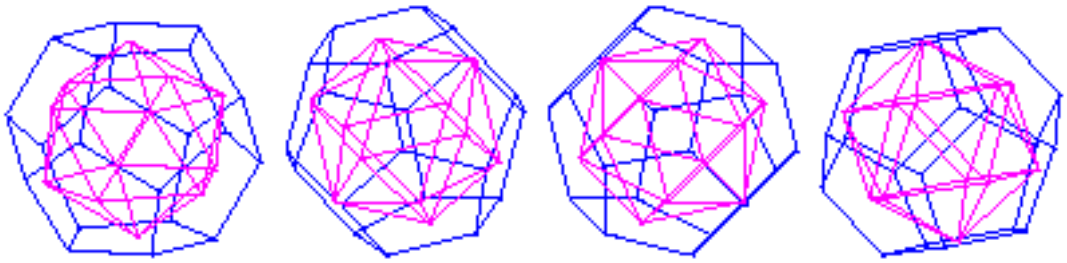
Solamente cinco poliedros regulares

Actividad 3. continuado

Podemos inscribir un dodecaedro en un icosaedro.



Un icosaedro puede ser inscrito en su dual, el dodecaedro.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Redes para el cubo

Un cubo se puede doblar a partir de una sola pieza de papel cortado en forma de una cruz. La cruz está formada por seis cuadrados, acomodados de modo tal que cuando se doblan se forma un cubo (ver fig. 1). Esta cruz de seis cuadrados es un plano o red para el cubo.

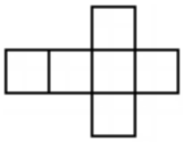


Figura 1

Cualquier configuración plana de polígonos que se puede doblar para formar un poliedro se llama un plano para el poliedro. En general, un poliedro tiene varios planos distintos, aunque desde luego todos tienen el mismo número y la misma clase de polígonos. La figura 2 muestra tres planos más para el cubo.

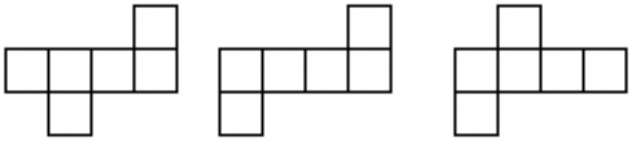


Figura 2

Hay muchas otras formas de diseñar un plano para un cubo. La regla es que debe ser posible cortar la red en una sola pieza, de modo que en una red cada cuadrado debe estar unido a otro cuadrado a lo largo de una arista común. No cualquier configuración de seis cuadrados se puede doblar para formar un cubo. *¿Cuáles de los siguientes son planos para un cubo?*

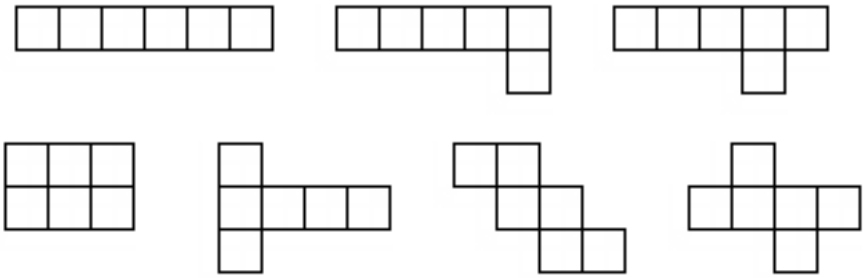
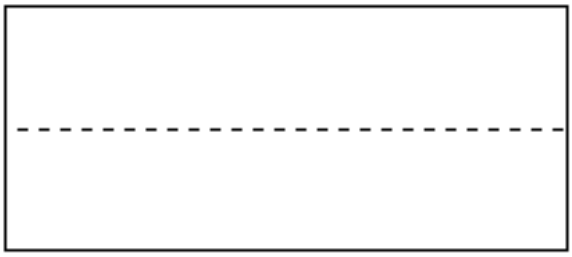


Figura 3

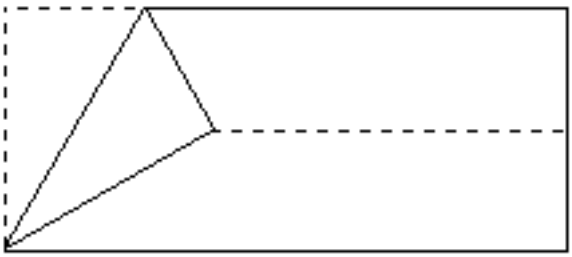
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un tetraedro con un billete de un dólar

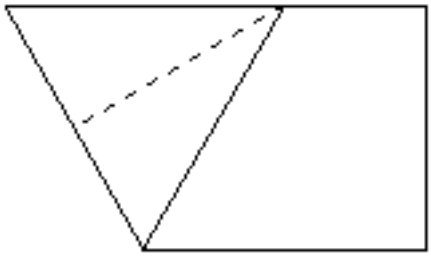
1) Doble un billete nuevo de un dólar a lo largo de la paralela media.



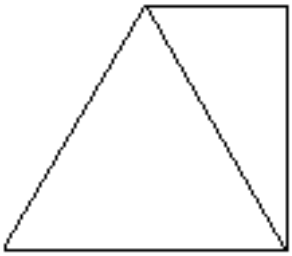
2) Doble una esquina del billete de un dólar sobre la paralela media de modo que el pliegue pase por la esquina adyacente para formar un ángulo de 60°.



3) Doble el billete sobre sí mismo para bisecar el ángulo de 120° y formar otro ángulo de 60°.



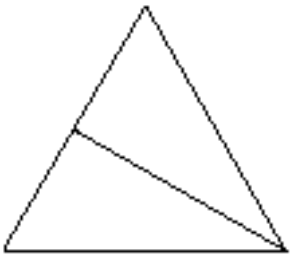
4) Doble otra vez para bisecar el ángulo de 120° y formar otro triángulo equilátero.



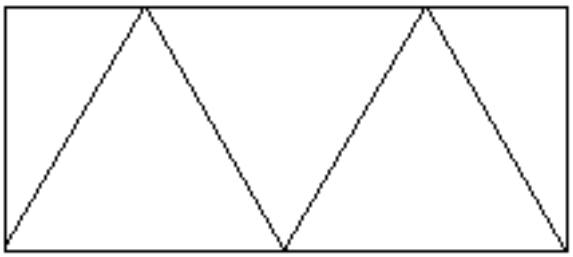
© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Un tetraedro con un billete de un dólar

5) Doble la última aleta.



6) Cuando abra el billete debe ver un patrón en zigzag como se muestra abajo.



7) Junte una aleta de un extremo con la otra para formar un tetraedro.

- *¿Cuál es la razón entre las longitudes de los lados de un rectángulo que se dobla exactamente en un tetraedro regular (en la forma en que se dobló el billete)?*

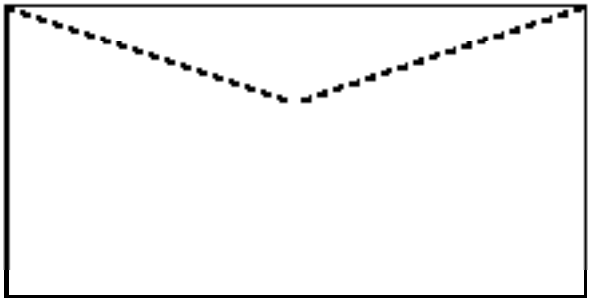
- *¿Qué tanto se aproxima el billete de un dólar a esa forma?*

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

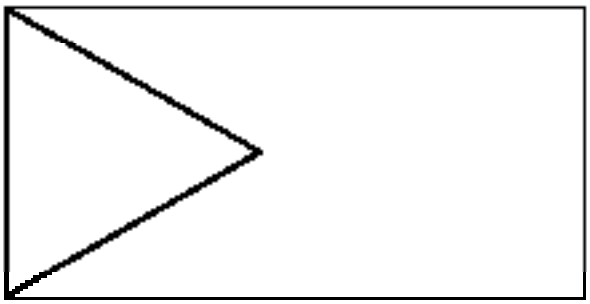
Tetraedro hechos de un sobre

Material adicional para grupos que van más rápidos de otros grupos.

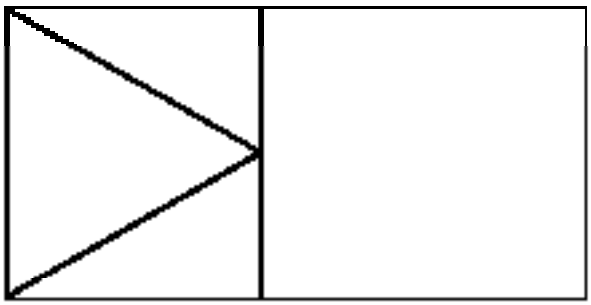
1) Un tetraedro hecho de un sobre cerrado.



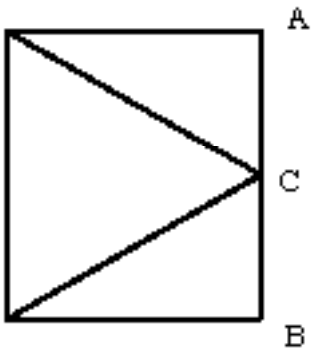
2) En un lado del sobre cerrado dibuje un triángulo equilátero con su lado igual al lado más corto del sobre.



3) Dibuje una línea paralela al lado más corto a través del vértice del triángulo equilátero.



4) Doble por los lados del triángulo. Empuje A hacia B, y separe C del punto correspondente en el otro lado del sobre. Ponga cello en la abertura y tenrá un tetraedro.

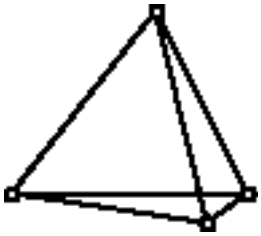


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Poliedros regulares con varillas de madera

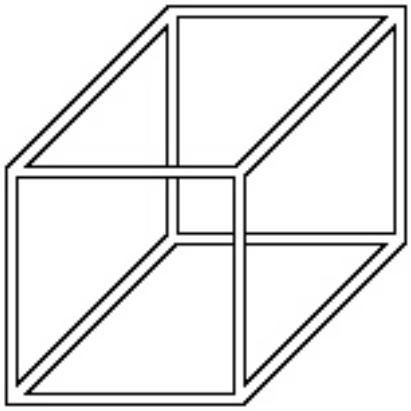
Actividad 6

Cuatro tetraedro
Trabajo para cuatro grupos de dos o tres personas. Construya un tetraedro por equipo (cuatro caras triangulares, se juntan tres aristas en cada vértice). Una o dos personas pueden armar fácilmente el tetraedro. Va a necesitar 6 varillas y 4 juntas. Note que el tetraedro es muy estable. Explore las rotaciones del tetraedro. Rote 120° alrededor de un eje que va del vértice de arriba al centro de la base opuesta. Rote el tetraedro 180° deteniéndolo por los puntos medios de dos aristas opuestas.



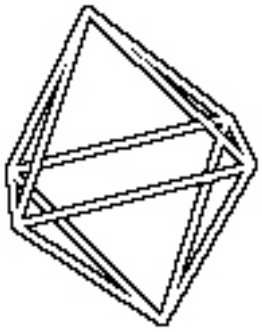
El cubo
Trabajo para un equipo de tres o cuatro personas. Construya un cubo (seis caras cuadradas, se juntan tres aristas en cada vértice). Es mejor si al menos dos personas participan en la construcción del cubo. Va a necesitar 12 varillas y 8 juntas. Note que el cubo no es nada estable. Incluso se puede colapsar y quedar plano. Cuando está plano sobre el piso parece uno de esos cubos dibujados en los libros de texto.

Discuta por qué el cubo no es estable. Para hacerlo estable (con juntas flexibles) es necesario triangular. Discuta dónde se utiliza el principio de triangular en edificios, puentes, torres para electricidad, etc



El octaedro
Trabajo para un equipo con tres o cuatro personas. Construya un octaedro (ocho caras triangulares, cuatro aristas se juntan en cada vértice). Va a necesitar 12 varillas y 6 juntas. Note que el octaedro es también muy estable.

Explore las rotaciones del octaedro. Rote 90° alrededor de un eje que va de un vértice al vértice opuesto.

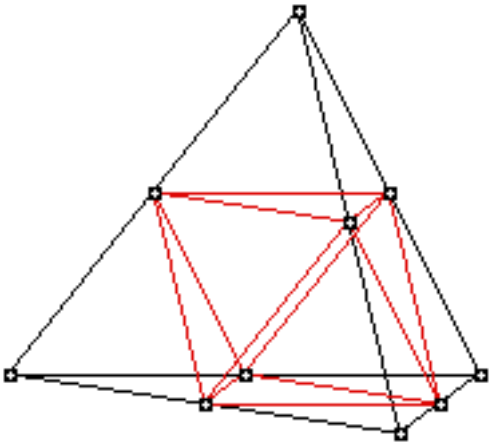


© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Poliedros regulares con varillas de madera

El gran tetraedro

El gran tetraedro. Va a necesitar 36 varillas y 22 juntas. Los grupos que construyeron cuatro tetraedros y un octaedro se unen. Ponga el octaedro con una de sus caras sobre el piso. Ponga tres tetraedros alrededor del octaedro, cara con cara. Ponga el cuarto tetraedro encima del octaedro. Los cuatro tetraedros con el octaedro en medio forman un nuevo tetraedro. La longitud de las aristas de este tetraedro es dos veces el tamaño de las aristas de los tetraedros originales.



- Compare el área de la base del gran tetraedro con el área de la base de uno de los tetraedros originales. Puede ver que la base del gran tetraedro está formada por cuatro triángulos. El área de la base del gran tetraedro es por tanto cuatro veces más grande que el área del tetraedro original.
- Compare la altura del gran tetraedro con la altura del tetraedro original. La altura es el doble.
- Compare el volúmen del gran tetraedro con el volúmen del tetraedro original. El volúmen de un tetraedro se puede calcular usando la fórmula $v = \frac{B \times h}{3}$.

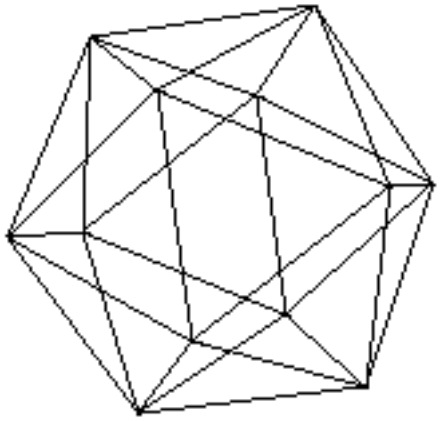
  Como la base del gran tetraedro es cuatro veces más grande, y la altura es dos veces más grande, el volúmen será 8 veces más grande, $\frac{4B \times 2h}{3} = 8\frac{B \times h}{3}$.
- Con esta información podemos encontrar cuál es el volúmen del octaedro de en medio. El volúmen de este octaedro es la diferencia entre el volúmen del gran tetraedro y cuatro veces el volúmen del tetraedro original. Por tanto el volúmen del octaedro es cuatro veces el volúmen del tetraedro con la misma longitud de arista.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Poliedros regulares con varillas de madera

El gran icosaedro

Trabajo para un equipo de 5 a 8 personas. Construya el icosaedro (20 caras triangulares, con 5 aristas en cada vértice). Va a necesitar 30 varillas y 12 juntas. Un icosaedro pequeño puede ser útil como modelo para construir el grande.



Note que el icosaedro, una vez completado es muy estable. No se deformará, ni doblará. Puede rotarlo fácilmente sobre uno de sus vértices. El eje de rotación será la línea que conecta el vértice sobre el piso con el vértice opuesto.

Referencia

Lovitt, Charles and Clarke, Doug. *Activity Bank Volume 1*. Canberra, Australia: Curriculum Development Centre, 1988.

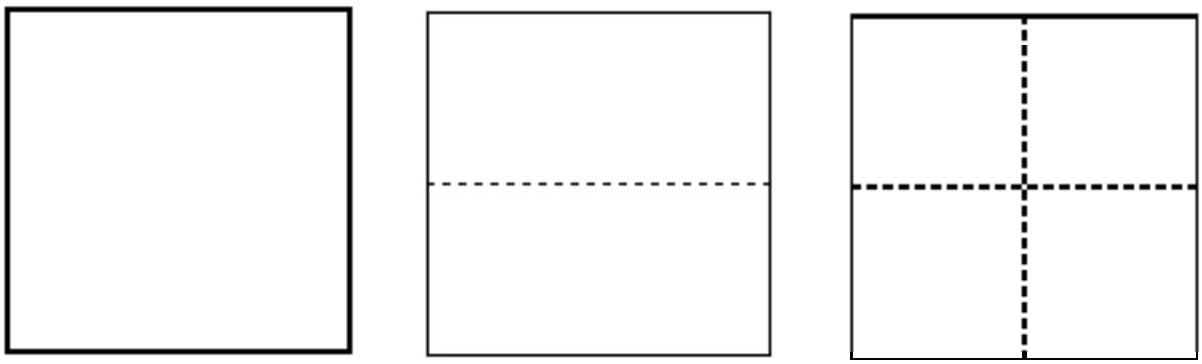
Créditos de las fotagrafías.
Isabel Perkins. Derechos reservados. Usado con permiso.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

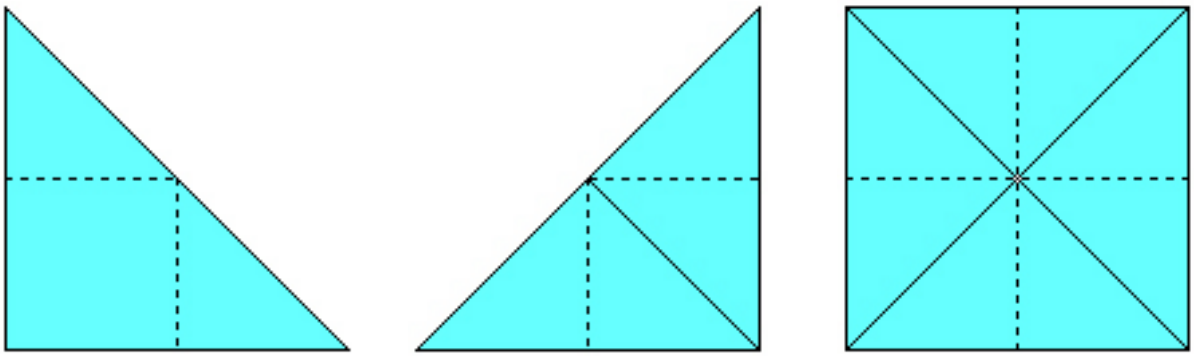
Octaedro de origami

Puede encontrar las instrucciones para doblar el octaedro en la página en la red construida por Aisling Leavy http://www.public.asu.edu/~aaafp/octahedron/octahedron.html
Las fotografías mostradas aquí fueron tomadas de ahí y se usan con permiso.

Doble el cuadrado a la mitad a lo largo de la paralela media (el lado blanco del papel afuera). Abra otra vez y doble a lo largo de la otra paralela media (perpendicular a la primera). Abra el cuadrado.



Ahora doble a lo largo de la diagonal con el lado de color de la hoja hacia afuera. Abra el cuadrado. Ahora doble a lo largo de la otra diagonal. Abra el cuadrado. Éste tendrá pliegues de "montaña" a lo largo de las diagonales, y pliegues de "valle" a lo largo de las paralelas medias.



© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Octaedro de origami

Los fotografías aquí son tomados de:
http://www.public.asu.edu/~aaafp/octahedron/octahedron.html

1) Forme una estrella de cuatro puntas.

2) Repita el proceso para tener seis estrellas. Es conveniente tener dos de cada color.

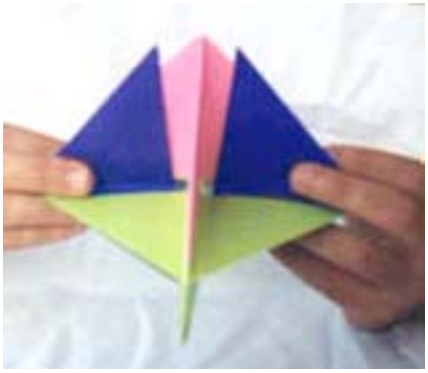
3) Con las seis estrellas puede formar un octaedro de la siguiente manera. Tome tres unidades, las dos primeras del mismo color. Ponga las solapas opuestas de la tercera unidad dentro de las bolsas de las unidades del mismo color.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.

Octaedro de origami

4) Tome una cuarta unidad del mismo color que la tercera. Ponga solapas opuestas de esta cuarta unidad dentro de las bolsas inferiores de las unidades del otro color.

5) Rote el octaedro. Escoja una quinta unidad de otro color. Inserte dos solapas dentro y dos solapas por fuera.



6) Use la última unidad. Inserte dos solapas dentro de las bolsas y ponga dos solapas por fuera.

7) Cada unidad tendrá dos solapas en la parte de afuera y dos solapas dentro de otra unidad. Ahora tiene el octaedro completo.

© Copyright 2005-2016 Arizona Board of Regents. Estos materiales pueden ser copiados libremente siempre y cuando no se vendan con fines comerciales.